DARSTELLUNG VON STRIKT QUADRATPOSITIVEN LINEAREN FUNKTIONALEN AUF ENDLICHDIMENSIONALEN POLYNOMRÄUMEN

von
Gert Renner
aus Wunsiedel

Diss
Erlangen
1986

1986 № 190

DARSTELLUNG VON STRIKT QUADRATPOSITIVEN LINEAREN FUNKTIONALEN AUF ENDLICHDIMENSIONALEN POLYNOMRÄUMEN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Gert Renner
aus Wunsiedel

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Februar 1986

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatter: Prof. Dr. H. Berens
Zweitberichterstatter: Priv. Doz. Dr. H. J. Schmid

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG und ZUSAMMENFASSUNG 3

I. KUBATURFORMELN IM $\mathbb{R}^n$ 8

1. Darstellungen von linearen Funktionalen auf Polynomräumen 8

1.1 Interpolatorische Darstellungen 8
1.2 Das zu einer Darstellung gehörende Polynomideal 11

2. Kubaturformeln für strikt quadratpositive lineare Funktionale 19

2.1 Strikt positive und strikt quadratpositive lineare Funktionale 19
2.2 Eine untere Schranke für die Knotenanzahl und zur Existenz von Funktionalen, für die diese Schranke scharf ist 21
2.3 Ein allgemeiner Konstruktionsansatz für Kubaturformeln 23

II. KUBATURFORMELN IM $\mathbb{R}^2$ 30

3. Über H-Basen von Polynomidealen 30

4. Orthogonale Polynome in zwei Variablen 36

4.1 Elementare Eigenschaften 36
4.2 Eine Charakterisierung von strikt quadratpositiven linearen Funktionalen über die Rekursionsformeln der orthogonalen Polynome 47

5. Über Kubaturformeln mit minimaler Knotenanzahl 55

6. Eine Methode zur Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 für beliebige strikt quadratpositive lineare Funktionale 61

7. Eine konstruktive Charakterisierung einer Klasse von zentralsymmetrischen Kubaturformeln für beliebige zentralsymmetrische strikt quadratpositive lineare Funktionale 74

LITERATURVERZEICHNIS 91

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538110_0007

EINLEITUNG und ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Approximation eines beliebigen, strikt positiven, linearen Funktionals I auf dem Raum $\mathbb{P}^n$ der reellen Polynome in n Variablen durch endliche Summen folgender Art:

$$\Phi(P) := \sum_{i=1}^{r} c_i P(k_i), \quad P \in \mathbb{P}^n, \; 0 \neq c_i \in \mathbb{R}, \; k_i \in \mathbb{R}^n.$$

Ist diese Darstellung auf dem Raum $\mathbb{P}^n_m$ aller Polynome $P \in \mathbb{P}^n$ höchstens m-ten Grades exakt, und existiert ein $Q \in \mathbb{P}^n_{m+1}$ mit $\Phi(Q) \neq I(Q)$, dann nennen wir Φ eine Darstellung zum Funktional I vom Grad m; sind zudem alle Koeffizienten c_i positiv, dann nennen wir Φ eine Kubaturformel zum Funktional I vom Grad m. Es ist wohlbekannt (vgl. Mysovskikh[28]), daß zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Kubaturformel zum Funktional I vom Grad m mit höchstens $\dim \mathbb{P}^n_m$ Knoten k_i existiert.

Es geht uns insbesondere um die Konstruktion von Kubaturformeln eines vorgegebenen Grades für ein, in der Regel in Integralform, gegebenes Funktional.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Problem anzugehen. Insbesondere bei der Suche nach Darstellungen vom Grad m mit einer möglichst geringen Knotenanzahl ist ein Ansatz, der bereits im Eindimensionalen zum Erfolg geführt hat, verstärkt untersucht worden, nämlich die Knoten als gemeinsame Nullstellen von geeigneten orthogonalen Polynomen zu kennzeichnen. Wir nennen stellvertretend die mit am Anfang dieser Entwicklung stehenden Arbeiten von Radon[32], Stroud[40] und von Mysovskikh[24]. Möller[19]

hat, einer Idee von Günther[7] folgend, der Darstellung Φ von I das Polynomideal

$$A_\Phi := \{ P \in \mathbb{P}^n / \; P(k_i) = 0 \;\forall\; 1 \leq i \leq r \}$$

zugeordnet und er hat mit Hilfe der Idealtheorie einen Zugang zu sogenannten verallgemeinerten Kubaturformeln eröffnet. Wir nennen A_Φ das zur Darstellung Φ gehörende Ideal. Die dabei verfolgte Grundidee zur Konstruktion von Darstellungen besteht darin, endliche Polynomsysteme so zu bestimmen, daß sie die Basis des zu einer Darstellung Φ von I gehörenden Polynomideals A_Φ sind. Die Knoten von Φ sind dann genau durch das reelle Nullstellengebilde $NG(A_\Phi)$ von A_Φ gegeben.
Schmid[37,38] hat mit Hilfe der Theorie der reellen Ideale eine Charakterisierung der zu interpolatorischen Kubaturformeln (—> 1.2) gehörenden Ideale angegeben und er konnte so konkrete Konstruktionsverfahren im Zweidimensionalen, im wesentlichen für Funktionale mit Produktstruktur, entwickeln.

Wir beweisen im Abschnitt 2 eine Erweiterung dieses zentralen Ergebnisses von Schmid, welche es uns ermöglicht, ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad m zum Funktional I anzugeben. Dieses Verfahren beruht auf folgender Aussage:
Ist $R_1,\ldots,R_t$ eine H-Basis (—> 2.3) aus m-orthogonalen Polynomen (—> 2.3), des von diesen Polynomen in $\mathbb{P}^n$ erzeugten Ideals A und enthält A ein fundamentales System vom Grad m+1 (—> 1.2), dann existiert genau dann eine interpolatorische Kubaturformel Φ zum Funktional I mindestens vom Grad m, deren Knoten in NG(A) liegen, wenn die Matrix

$$(I(\Pi_U(U_i \cdot U_j)))_{1 \leq i,j \leq d}$$

positiv semidefinit ist. Dabei bezeichnet $U \subset \mathbb{P}_m^n$ ein algebraisches Komplement von A mit Dimension d, Π_U die Projektion von $\mathbb{P}^n$ auf diesen Unterraum, und $U_1,\ldots,U_d$ eine beliebige Basis von U. Es gilt dann

$$\Phi(P) = \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq 0}}^{q} c_i P(k_i),$$

wobei $\{k_1,\ldots,k_q\}$ die Menge der reellen Nullstellen von A und $c_1,\ldots,c_q$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\sum_{i=1}^{q} c_i U_j(k_i) = I(U_j), \quad 1 \leq j \leq d$$

ist. Dieses Verfahren stimmt mit demjenigen von Schmid[37] in all den Fällen überein, in denen A bereits das zur Darstellung gehörende Ideal ist.

In den Abschnitten 3 bis 7 beschränken wir uns auf die Untersuchung des Kubaturproblems im Zweidimensionalen.
In den Abschnitten 3 und 4 widmen wir uns den Eckpfeilern des oben dargestellten allgemeinen Verfahrens — H-Basen von Polynomidealen und orthogonalen Polynomen. Dabei zeigen wir unter anderem in Abschnitt 4 eine Reihe neuer, für das folgende wesentlicher, charakteristischer Eigenschaften der Rekursionsformeln der orthogonalen Polynome in zwei Variablen.
Im Abschnitt 6 stellen wir ein neues Verfahren zur Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 für beliebige, strikt positive, lineare Funktionale vor, welches von der Grundidee ausgeht, daß im zugehörigen Ideal zwei orthogonale Polynome P, Q vom Grad k liegen, die einer einfachen Bedingung genügen. Diese garantiert,

daß P, Q eine H-Basis des erzeugten Ideals A ist und, daß A ein fundamentales System vom Grad 2k-1 enthält.

Als erstes Beispiel holen wir uns ein zentrales Ergebnis der Dissertation von Günther, veröffentlicht in der Arbeit von Günther [8] – die Charakterisierung aller minimaler Kubaturformeln vom Grad 3 für beliebige, strikt positive, lineare Funktionale.

Als zweites Beispiel beschreiben wir alle vollsymmetrischen Kubaturformeln vom Grad 5 mit maximal 9 Knoten für beliebige, vollsymmetrische, strikt positive, lineare Funktionale, die für spezielle Funktionale zum Teil bereits wohlbekannt sind. Dieses Beispiel verdeutlicht, welche enormen Schwierigkeiten auftreten können, wenn man eine, für eine größere Klasse von Funktionalen gültige, exakte untere Schranke für die Knotenanzahl von (symmetrischen) Kubaturformeln vom Grad m angeben will.

Im Abschnitt 7 entwickeln wir für zentralsymmetrische Funktionale ein Verfahren zur Konstruktion von zentralsymmetrischen Kubaturformeln vom Grad 2k-1, deren zugehöriges Ideal ein fundamentales System vom Grad k+1 enthält. Zudem beweisen wir wichtige Eigenschaften dieser Formelklasse. Für Funktionale mit Produktstruktur beinhaltet dieses Verfahren eine bereits von Morrow/Patterson[21] und Schmid[37] entwickelte Methode.

Wir leiten mit diesem Verfahren zwei Familien von vollsymmetrischen Kubaturformeln für vollsymmetrische Funktionale her. Diese Formelklassen enthalten ebenfalls für spezielle Funktionale zum Teil bereits wohlbekannte Formeln.

An diesem Beispiel verdeutlichen wir die Bedeutung eines bekannten Phänomens (—> 2.1), welches im Zusammenhang mit der "Positivität" von linearen Funktionalen auf $\mathbb{P}^n$ für $n \geq 2$ auftritt:

Ein lineares Funktional I auf $\mathbb{P}^n$ mit der Eigenschaft

(*) $$\forall\, P \in \mathbb{P}^n \setminus \{0\}: \quad I(P^2) > 0$$

muß nicht notwendig positiv sein. Wir nennen Funktionale mit der Eigenschaft (*) strikt quadratpositiv.
Nahezu alle bisher bekannten Ergebnisse zum Kubaturproblem haben von der Positivität des darzustellenden Funktionals nur die Eigenschaft (*) benutzt. Aus diesem Grund befassen wir uns ausgiebig mit der Klasse der quadratpositiven Funktionale.

Im eingeschobenen Abschnitt 5 holen wir uns mit Hilfe der in Abschnitt 3 und 4 dargestellten Methoden unter anderem die Charakterisierung Mysovskikhs[30] von denjenigen Funktionalen, die Kubaturformeln vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten besitzen, wobei wir diese Charakterisierung ergänzen. Zudem zeigen wir die Existenz von Funktionalen dieses Typs, die invariant bezüglich einer Spiegelung an der Geraden x-y=0 sind. Weiterhin geben wir einen zum Teil neuen Beweis von Möllers[20] unterer Schranke für die Knotenanzahl von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 für zentralsymmetrische Funktionale an.

An dieser Stelle gilt unser Dank Herrn Professor Dr. H. Berens für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit und für sein Interesse, das er den hier entwickelten Methoden entgegengebracht hat. Weiterhin gilt unser Dank Herrn Privatdozent Dr. H.J. Schmid für die vielen konstruktiven Diskussionen, insbesondere in der Anfangsphase dieser Arbeit, und für den Zugang zum Kubaturproblem, den er uns in seiner Arbeit auf diesem Gebiet eröffnet hat.

I. KUBATURFORMELN IM $\mathbb{R}^n$

1. DARSTELLUNGEN VON LINEAREN FUNKTIONALEN AUF POLYNOMRÄUMEN

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit einigen Aspekten des Kubaturproblems befassen, die sich unabhängig von der Positivität des darzustellenden Funktionals behandeln lassen.
L sei ein beliebiges, von der Nullabbildung verschiedenes, lineares Funktional auf dem Raum $\mathbb{P}^n$ der reellen Polynome in den Variablen $x_1,\ldots,x_n$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}^n_k$ den Raum aller $P \in \mathbb{P}^n$ höchstens k-ten Grades.

1.1 Interpolatorische Darstellungen

Unter einer Darstellung Φ des Funktionals L vom Grad m wollen wir ein lineares Funktional

$$\Phi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto \sum_{i=1}^{r} c_i P(k_i) \tag{1.1}$$

mit von Null verschiedenen reellen Koeffizienten c_i, paarweise verschiedenen Knoten $k_i \in \mathbb{R}^n$ und mit den Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad \forall\, P \in \mathbb{P}^n_m : \Phi(P) = L(P),$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\, Q \in \mathbb{P}^n_{m+1} : \Phi(Q) \neq L(Q)$$

verstehen. Wir bezeichnen mit K_Φ die Menge $\{k_1,\ldots,k_r\}$ der Knoten von Φ.
Im vierten Teil der 1967 erschienenen zweiten Auflage des Buches von Krylov[14] wurde eine Methode zur Konstruktion von Punktmen-

gen $Y_{n,k} \subset \mathbb{R}^n$, bestehend aus jeweils $d(n,k) := \dim \mathbb{P}_k^n$ paarweise verschiedenen Punkten $y_1,\ldots,y_{d(n,k)}$, vorgestellt, für die das von $Y_{n,k}$ in $\mathbb{P}^n$ erzeugte Ideal

$$A_{n,k} := \{P \in \mathbb{P}^n / \; P(y) = 0 \quad \forall\, y \in Y_{n,k}\}$$

die Eigenschaft

$$A_{n,k} \cap \mathbb{P}_k^n = \{0\} \tag{1.2}$$

besitzt.

Ist $X_1,\ldots,X_{d(n,k)}$ eine beliebige Basis von $\mathbb{P}_k^n$, dann ist somit die Matrix

$$(X_i(y_j))_{1 \le i,j \le d(n,k)} \tag{1.3}$$

nicht singulär, woraus die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{d(n,k)} c_j X_i(y_j) = L(X_i), \quad 1 \le i \le d(n,k)$$

folgt. Es existiert somit insbesondere eine Darstellung von L vom Grad m mit höchstens d(n,m) Knoten.

Im bereits erwähnten Buch von Krylov wurden so Darstellungen vom Grad m für Integrale

$$\int_X f(x)\, d\mu(x)$$

konstruiert.

Diese Darstellungen wurden interpolatorische Kubaturformeln genannt, da man sie auch durch Integration eines (wegen der Nichtsingularität der Matrix (1.3) existierenden) Interpolationspolynoms von f herleiten kann. Später (siehe z.B. Mysovskikh[26]) wurde dieser Begriff auf eine größere Klasse von Formeln übertragen. Dementsprechend nennen wir die Darstellung (1.1)

interpolatorisch, wenn der Rang der Matrix

$$(X_i(k_j))_{1\leq i\leq d(n,m),1\leq j\leq r}$$

gleich der Knotenanzahl r ist. Bei einer interpolatorischen Darstellung sind somit die Koeffizienten c_i bereits eindeutig durch die Knoten k_i bestimmt.

Wir geben jetzt die Methode zur Konstruktion der Punktmengen $Y_{n,k}$ an, da wir später mehrmals auf die spezielle Lage der Elemente von $Y_{n,k}$ zurückgreifen.

Für $n = 1$ genügt es, als Elemente von $Y_{1,k}$ $k+1$ paarweise verschiedene Punkte $y_{1,0},\ldots,y_{1,k}$ in $\mathbb{R}$ zu nehmen.

Kennt man für $n \geq 2$ eine Methode zur Konstruktion der Punktmengen $Y_{n-1,k}$, dann kann man die Punktmengen $Y_{n,k}$ induktiv wie folgt konstruieren:

$$Y_{n,0} := \{y_{0,1}^{(n)}\} \text{ mit } y_{0,1}^{(n)} \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig.}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon\ Y_{n,k} := Y_{n,k-1} \cup \{y_{k,1}^{(n)},\ldots,y_{k,h(n,k)}^{(n)}\}$$

$$\text{mit } h(n,k) := \dim \mathbb{P}_k^n - \dim \mathbb{P}_{k-1}^n,$$

wobei die $h(n,k)$ paarweise verschiedenen Punkte $y_{k,1}^{(n)},\ldots,$ $y_{k,h(n,k)}^{(n)}$ so gewählt sind, daß sie auf einer Hyperebene $H_{n,k}$ in $\mathbb{R}^n$ liegen, auf der kein Punkt aus $Y_{n,k-1}$ liegt, und kein Polynom $P \in \mathbb{P}_k^n$, $P \neq 0$, existiert, dessen Einschränkung auf $H_{n,k}$ in allen Punkten $y_{k,1}^{(n)},\ldots,y_{k,h(n,k)}^{(n)}$ verschwindet. Letzteres ist per Induktionsannahme möglich, da $h(n,k) = \dim \mathbb{P}_k^{n-1}$ gilt.

1.2 Das zu einer Darstellung gehörende Polynomideal

Die im wesentlichen auf Möller[19] zurückgehende zentrale Idee, Darstellungen vom Typ (1.1) für das Funktional L zu charakterisieren und zu berechnen, besteht darin, Φ das Polynomideal

$$A_\Phi := \{P \in \mathbb{P}^n / P(k_i) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq r\}$$

zuzuordnen. Wir nennen A_Φ das zur Darstellung Φ gehörende Ideal. Es besteht dann die Aufgabe, (endliche) Polynomsysteme P^* so zu bestimmen, daß sie die Basis eines zu einer Darstellung von L gehörenden Polynomideals sind. Die Knoten dieser Darstellung sind dann gemeinsame Nullstellen der Elemente von P^*.

Wir werden im weiteren mit $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ das von den Polynomen $P_1,P_2,\ldots,P_n$ in $\mathbb{P}^n$ erzeugte Ideal und mit NG(A) die Menge aller reellen Nullstellen eines Ideals A in $\mathbb{P}^n$ bezeichnen.

Das zu einer Darstellung gehörende Ideal ist ein Spezialfall eines reellen Ideals. Ein Ideal A in $\mathbb{P}^n$ wird reelles Ideal genannt, wenn jedes Polynom in $\mathbb{P}^n$, welches in NG(A) verschwindet, bereits zum Ideal gehört. Schmid[34] hat erstmals die folgende Charakterisierung der reellen Ideale von Dubois/Efroymson[2] und von Risler[33] im Bereich des Kubaturproblems angewandt:

Ein Ideal A in $\mathbb{P}^n$ ist genau dann ein reelles Ideal, wenn aus $Q_1^2 + \ldots + Q_t^2 \in A$ bereits $Q_i \in A$, $1 \leq i \leq t$, folgt.

Die sicherlich wohlbekannten Aussagen des folgenden Lemmas zeigen, daß der oben vorgeschlagene Weg überhaupt sinnvoll ist.

Lemma 1.1:

Das Polynomideal A_Φ hat folgende Eigenschaften:

(i) $NG(A_\Phi) = K_\Phi$

(ii) Jede Idealbasis $P^* = \{P_1,\ldots,P_s\}$ von A_Φ besteht aus

mindestens n Polynomen, und jeder Knoten k von Φ ist eine einfache Nullstelle von A_Φ, d.h. es existieren $1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq s$, so daß die Matrix

$$\left(\frac{\partial P_{i_\nu}}{\partial x_\mu} (k) \right)_{1 \leq \nu, \mu \leq n}$$

nicht singulär ist.

Beweis:

Für jedes $1 \leq i \leq r$ sei $(k_{i1}, \ldots, k_{in})^T$ die Koordinatendarstellung des Knotens $k_i \in K_\Phi$.

(i) Für jedes $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus K_\Phi$ und für jedes $1 \leq i \leq r$ ist $V_i := \{j \in \{1, \ldots, n\} / \; y_j \neq k_{ij}\}$ nicht leer, und daher gehört das Polynom

$$P(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{r} \prod_{j \in V_i} (x_j - k_{ij})$$

zum Ideal A_Φ, es gilt aber $P(y) \neq 0$.

(ii) Sei $1 \leq l \leq r$. Für jedes $1 \leq \eta \leq n$ gehört das Polynom

$$Q_\eta(x_1, .., x_n) := (x_\eta - k_{l\eta}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{r} \sum_{j=1}^{n} (x_j - k_{ij})^2$$

zum Ideal A_Φ. Es hat somit eine Darstellung

$$Q_\eta = \sum_{i=1}^{s} R_{\eta i} P_i$$

und es gilt

$$\frac{\partial Q_\eta}{\partial x_\nu}(k_l) = \begin{cases} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{r} \sum_{j=1}^{n} (k_{lj} - k_{ij})^2 & \eta = \nu \\ 0 & \eta \neq \nu, \end{cases}$$

woraus

$$n = \text{Rang}\left(\left(\frac{\partial Q_\eta}{\partial x_\nu}(k_1) \right)_{1 \le \eta, \nu \le n} \right) =$$

$$= \text{Rang}\left(\left(\sum_{i=1}^{s} R_{\eta i}(k_1) \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}(k_1) \right)_{1 \le \eta, \nu \le n} \right) \le$$

$$\le \text{Rang}\left(\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}(k_1) \right)_{1 \le i \le s, 1 \le \nu \le n} \right) \le s$$

folgt. //

Im allgemeinen sind nur die Knoten von Φ eindeutig durch A_Φ bestimmt und die Einfachheit der Nullstellen von A_Φ erleichtert ihre numerische Berechnung. Ist Φ interpolatorisch, dann sind auch die Koeffizienten von Φ eindeutig bestimmt und man kann sie als eindeutig bestimmte Lösung des (in der Regel) überbestimmten Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{r} c_j X_i(k_j) = L(X_i), \quad 1 \le i \le d(n,m)$$

berechnen.

Wir widmen uns jetzt der Herleitung weiterer Eigenschaften des Ideals A_Φ.

Eine Polynommenge $S \subset \mathbb{P}^n$ heißt <u>fundamental vom Grad m</u> ($m \in \mathbb{N}$), wenn

$$\text{SPAN}(\mathbb{P}^n_{m-1} \cup S) = \mathbb{P}^n_m$$

gilt.

Ist $\mathbb{P}^n = H \oplus G$ die direkte Summe zweier Unterräume H und G, dann bezeichnen wir für $P \in \mathbb{P}^n$ mit $P_H \in H$ und $P_G \in G$ die eindeutig bestimmten Polynome mit der Eigenschaft $P = P_H + P_G$ und mit

$$\Pi_G: \mathbb{P}^n \longrightarrow G, \qquad \Pi_H: \mathbb{P}^n \longrightarrow H$$
$$P \longmapsto P_G \qquad P \longmapsto P_H$$

die Projektionen auf diese Unterräume. Mit ihrer Hilfe können wir einen neuen elementaren Beweis des folgenden Lemmas angeben.

Lemma 1.2:

Sei A ein Ideal in $\mathbb{P}^n$, welches ein fundamentales System vom Grad k enthält. Sei U ein algebraisches Komplement von $A \cap \mathbb{P}_k^n$ in $\mathbb{P}_k^n$ (d.h. $\mathbb{P}_k^n = U \oplus (A \cap \mathbb{P}_k^n)$) mit Dimension d und Basis $U_1,..,U_d$. Dann gilt:

(i) $|NG(A)| \leq \dim(U)$.

(ii) Ist $s := |NG(A)| > 0$ und sind $z_1,..,z_s$ die Elemente von NG(A), dann gilt:

(a) $s = \text{Rang}\ (\ (\ U_i(z_j))_{1 \leq j \leq s, 1 \leq i \leq d})$,

(b) $s = \dim(U)$ genau dann, wenn A ein reelles Ideal ist.

Beweis:

Hat A keine reelle Nullstelle, dann ist nichts zu zeigen.

Ist $\{y_\nu = (y_{\nu 1},..,y_{\nu n})^T \in \mathbb{R}^n / \ 1 \leq \nu \leq t\}$ eine Menge von t paarweise verschiedenen Nullstellen von A, dann gilt für die Polynome

$$P_\nu := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{t} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - x_j)^2, \qquad 1 \leq \nu \leq t:$$

$$(\Pi_U(P_\nu))(y_\mu) = P_\nu(y_\mu) \begin{cases} = 0, & \nu \neq \mu \\ > 0, & \nu = \mu. \end{cases}$$

Somit sind die Polynome $\Pi_U(P_\nu)$, $1 \leq \nu \leq t$, linear unabhängig und daraus folgen (i) und (ii)-(a); (ii)-(b) folgt wiederum ohne Schwierigkeiten aus (ii)-(a). //

Die Aussagen (i) und (ii)-(b) wurden in dieser Form erstmals von Schmid [37] formuliert und dort mit Hilfe einer Idee von Mysovskikh[29] bewiesen.

Im folgenden Lemma zeigen wir den Zusammenhang zwischen fundamentalen Polynomsystemen und interpolatorischen Darstellungen. Die Notwendigkeit der angegebenen Eigenschaft des zu einer interpolatorischen Darstellung gehörenden Ideals ist wohlbekannt.

Lemma 1.3:

Die Darstellung (1.1) von L ist genau dann interpolatorisch, wenn das zur Darstellung gehörende Ideal A_Φ ein fundamentales System vom Grad m + 1 enthält.

Beweis:

Enthält A_Φ ein fundamentales System vom Grad m+1, ist U_Φ ein Unterraum von $\mathbb{P}_m^n$ mit $\mathbb{P}_m^n = (A_\Phi \cap \mathbb{P}_m^n) \oplus U_\Phi$ und mit Dimension u, ist $B_1,..,B_u$ eine Basis von U_Φ und $B_{u+1},..,B_{d(n,m)}$ eine Basis von $A_\Phi \cap \mathbb{P}_m^n$, dann folgt aus Lemma 1.1 und 1.2:

$$r = |NG(A_\Phi)| = u = \text{Rang } ((B_i(k_j))_{1 \le i,j \le r}) =$$

$$= \text{Rang } ((B_i(k_j))_{1 \le i \le d(n,m), 1 \le j \le r})$$

und damit ist Φ interpolatorisch.

Die Umkehrung folgt aus der Existenz einer Lösung von

$$\sum_{i=1}^{d(n,m)} a_i X_i(k_j) = X^*(k_j), \quad 1 \le j \le r$$

für jedes Monom X^* vom Grad m + 1. X_i, $1 \le i \le d(n,m)$, ist dabei eine beliebige Basis von $\mathbb{P}_m^n$. //

Im restlichen Teil dieses Abschnittes befassen wir uns mit Darstellungen vom Typ (1.1), die Symmetrieeigenschaften des darzustellenden Funktionals widerspiegeln.

Wir bezeichnen mit G eine endliche Gruppe von orthogonalen Endomorphismen des euklidischen $\mathbb{R}^n$, und wir nennen ein lineares Funktional $F: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ G-invariant, wenn für alle $T \in G$ und für alle $P \in \mathbb{P}^n$ $F(P \circ T) = F(P)$ gilt, wobei das Polynom $P \circ T$ wie üblich durch $P \circ T(x) := P(T(x))$ definiert ist.

Ist unser darzustellendes Funktional L G-invariant, dann ist es auch sinnvoll, diese Eigenschaft von einer Darstellung des Funktionals zu fordern, falls die Ordnung von G nicht zu groß für den gewünschten Grad der Darstellung ist.

Lemma 1.4:

Für die Darstellung (1.1) zum Funktional L sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Φ ist G-invariant.

(ii) Es gilt:

(a) $\forall\, T \in G: T(K_\Phi) = K_\Phi$.

(b) $\forall\, k \in K_\Phi\ \forall\, T \in G: c_k = c_{T(k)}$. *)

Ist Φ interpolatorisch und L G-invariant, dann ist zu (i) und (ii) äquivalent:

(iii) $\forall\, T \in G\ \forall\, P \in A_\Phi: P \circ T \in A_\Phi$.

Beweis:

Aus (i) folgt (ii): Ist für ein $T \in G$ $T(K_\Phi) \neq K_\Phi$, dann existiert für ein $k \in K_\Phi \backslash T(K_\Phi)$ und für $D := (K_\Phi \backslash \{k\}) \cup T(K_\Phi)$ ein $P \in \mathbb{P}^n$ mit der Eigenschaft

$$P(x) = \begin{cases} 1 & x = k \\ 0 & x \in D. \end{cases}$$

$\Phi(P \circ T) = 0 \neq c_k = \Phi(P)$ ergibt dann einen Widerspruch zu (i).

*) Wir bezeichnen hier mit c_k den zum Knoten k gehörenden Koeffizienten von Φ.

Ist für ein $k \in K_\Phi$ $P \in \mathbb{P}^n$ so gewählt, daß

$$P(x) = \begin{cases} 1 & x = k \\ 0 & x \in K_\Phi \setminus \{k\} \end{cases}$$

gilt, dann folgt aus(i) für jedes $T \in G$:

$$c_k = \sum_{i=1}^{r} c_{k_i} P(k_i) = \Phi(P) = \Phi(P \circ T) = \sum_{i=1}^{r} c_{k_i} P(T(k_i)) = c_{T^{-1}(k)}$$

(i) folgt ohne Schwierigkeiten aus (ii).

(ii)-(a) und (iii) sind stets äquivalente Aussagen, wie man sofort mit Hilfe von Lemma 1.1-(i) nachprüft.

Ist Φ interpolatorisch und L G-invariant, dann folgt aus (iii), daß

$$\Phi^* : P \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} c_{T(k_i)} \right) P(k_i)$$

eine G-invariante Darstellung zum Funktional L vom Grad mindestens m ist, denn für jedes $P \in \mathbb{P}_m^n$ gilt:

$$\Phi^*(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} \sum_{i=1}^{r} c_{T(k_i)} \, (P \circ T^{-1})(T(k_i)) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} L(P \circ T^{-1}) = L(P).$$

Da eine interpolatorische Darstellung eindeutig durch seine Knotenmenge bestimmt ist, so folgt daraus $\Phi^* = \Phi$. //

Definiert man

$$(\mathbb{P}^n)_G := \{P \in \mathbb{P}^n / \; P \circ T = P \;\forall\; T \in G\},$$

$$(\mathbb{P}_m^n)_G := (\mathbb{P}^n)_G \cap \mathbb{P}_m^n ,$$

dann ist ein G-invariantes lineares Funktional $F: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ wegen

$$F(P) = \frac{1}{|G|} F\left(\sum_{T \in G} (P \circ T) \right) \quad \text{für } P \in \mathbb{P}^n$$

bereits eindeutig durch seine Werte auf $(\mathbb{P}^n)_G$ definiert. Ist somit unser darzustellendes Funktional L G-invariant und ist

$$\Psi\colon P \longmapsto \sum_{i=1}^{s} a_i P(y_i), \quad 0 \neq a_i \in \mathbb{R},\ y_i \in \mathbb{R}^n$$

ein G-invariantes Funktional auf $\mathbb{P}^n$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, P \in (\mathbb{P}^n_m)_G\colon \Psi(P) = L(P),$$

dann ist offenbar Ψ eine G-invariante Darstellung zum Funktional L mindestens vom Grad m.

2. KUBATURFORMELN FÜR STRIKT QUADRATPOSITIVE LINEARE FUNKTIONALE

Die ersten in Abschnitt 1 aufgezeigten Eigenschaften des zu einer Darstellung gehörenden Ideals waren rein algebraischer Natur. Wir wollen uns jetzt mit einem entscheidenden weiteren Aspekt des Kubaturproblems befassen, nämlich dem der Positivität des darzustellenden Funktionals und den aus der Forderung, daß jede Darstellung, so weit wie möglich, diese Eigenschaft widerspiegelt, sich ergebenden Fragestellungen. Ein wichtiges Ergebnis, welches beide Aspekte des allgemeinen Kubaturproblems verknüpft, ist der Satz von Schmid[37,Satz 2]. Eine Erweiterung dieses Satzes und ein daraus resultierendes allgemeines Konstruktionsprinzip für Kubaturformeln steht im Mittelpunkt dieses Abschnittes.

2.1 Strikt positive und strikt quadratpositive lineare Funktionale

Wir wollen zunächst ein Phänomen vorstellen, welches bei der Untersuchung der "Positivität" von linearen Funktionalen auf Polynomräumen auftritt. Es wurde insbesondere im Zusammenhang mit dem mehrdimensionalen Momentenproblem (siehe z.B. Fuglede[6]) untersucht und es spielt, wie wir später sehen werden, eine wichtige Rolle bei der Untersuchung des allgemeinen Kubaturproblems.
Wir führen folgende Kegel in $\mathbb{P}^n$ ein:

$$(\mathbb{P}^n)^+ := \{P \in \mathbb{P}^n / P(x) \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$(\mathbb{P}^n_m)^+ := (\mathbb{P}^n)^+ \cap \mathbb{P}^n_m,$$

$$(\mathbb{P}^n)^{++} := \{P \in (\mathbb{P}^n)^+ / \exists\, s \in \mathbb{N}\ \exists\, Q_1,..,Q_s \in \mathbb{P}^n: P = \sum_{i=1}^{s} Q_i^2\},$$

$$(\mathbb{P}_m^n)^{++} := (\mathbb{P}^n)^{++} \cap \mathbb{P}_m^n.$$

Für $n = 1$ stimmen $(\mathbb{P}^n)^+$ und $(\mathbb{P}^n)^{++}$ überein.

Bereits 1888 hat Hilbert[10] gezeigt, daß für $n \geq 2$ $(\mathbb{P}^n)^{++}$ eine echte Teilmenge von $(\mathbb{P}^n)^+$ ist. Ein erstes explizites Beispiel eines positiven Polynoms, welches nicht als Summe von Quadraten dargestellt werden kann, wurde 1967 von Motzkin[22] angegeben. 1979 haben Schmüdgen[39] und unabhängig davon Berg/Christensen/Jensen[1] weitere Beispiele angegeben, wobei letztere das Polynom

$$P(x,y) := (x^2 + y^2 - 1)x^2y^2 + 1 \tag{2.1}$$

vorgestellt haben. Dieses Polynom besitzt die Eigenschaft $P(x,y) \geq 26/27$, es liegt aber nicht in $(\mathbb{P}_6^2)^{++}$. Es dürfte wohl das einfachste Beispiel dieser Art sein, da man $(\mathbb{P}_4^2)^+ = (\mathbb{P}_4^2)^{++}$ zeigen kann.

Bezeichnet man mit Λ^n (bzw. Λ_m^n) den algebraischen Dualraum von $\mathbb{P}^n$ (bzw. $\mathbb{P}_m^n$) und führt man die Funktionalkegel

$$(\Lambda^n)^+ := \{I \in \Lambda^n / \; I(P) > 0 \; \forall \; P \in (\mathbb{P}^n)^+ \setminus \{0\}\},$$

$$(\Lambda_m^n)^+ := \{I \in \Lambda_m^n / \; I(P) > 0 \; \forall \; P \in (\mathbb{P}_m^n)^+ \setminus \{0\}\},$$

$$(\Lambda^n)^{++} := \{I \in \Lambda^n / \; I(P) > 0 \; \forall \; P \in (\mathbb{P}^n)^{++} \setminus \{0\}\},$$

$$(\Lambda_m^n)^{++} := \{I \in \Lambda_m^n / \; I(P) > 0 \; \forall \; P \in (\mathbb{P}_m^n)^{++} \setminus \{0\}\},$$

ein, dann kann man das zentrale Ergebnis der angegebenen Arbeit von Berg/Christensen/Jensen mit einer geringfügigen Modifikation wie folgt formulieren:

$$\forall \; n \geq 2 \; \forall \; P \in (\mathbb{P}^n)^+ \setminus (\mathbb{P}^n)^{++} \; \exists \; I \in (\Lambda^n)^{++} \setminus (\Lambda^n)^+ : \tag{2.2}$$

$$I(P) < 0$$

Der entscheidende Punkt im Beweis von (2.2) besteht darin, zu

zeigen, daß $(\mathbb{P}^n)^{++}$ abgeschlossen ist in $(\mathbb{P}^n)^+$.
Schmüdgen[39] hat ein erstes explizites Funktional aus $(\Lambda_6^2)^{++} \setminus (\Lambda_6^2)^+$ konstruiert und gezeigt, daß es zu einem Funktional aus $(\Lambda^2)^{++}$ fortgesetzt werden kann. Friedrich[4] hat ein Funktional $F \in (\Lambda^2)^{++}$ angegeben, welches auf dem Polynom (2.1) den Wert -1 annimmt.
Wir wollen im weiteren die Elemente von $(\Lambda^n)^{++}$ strikt quadratpositiv und die Elemente von $(\Lambda^n)^+$, wie allgemein üblich, strikt positiv nennen.

2.2 Eine untere Schranke für die Knotenanzahl und zur Existenz von Funktionalen, für die diese Schranke scharf ist

Wir betrachten ein beliebiges Funktional $I \in (\Lambda^n)^{++}$. Unter einer Kubaturformel zum Funktional I vom Grad m wollen wir eine Darstellung Φ vom Typ (1.1) verstehen, deren sämtliche Koeffizienten c_i positiv sind. Natürlich kann so eine Darstellung nur dann existieren, wenn I eingeschränkt auf $\mathbb{P}_m^n$ positiv ist.
Gehört I bereits zu $(\Lambda^n)^+$, dann garantiert der bekannte Satz von Tschakaloff für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Kubaturformel zum Funktional I mit höchstens dim $\mathbb{P}_m^n$ Knoten. In der hier benötigten Form wurde der Satz von Tschakaloff 1975 von Mysovskikh[28] bewiesen. Einen Beweis von Donner mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln findet man in Schmid[38].
Eine erste Konsequenz der strikten Quadratpositivität von I ist die folgende wohlbekannte untere Schranke für die Knotenanzahl r einer Kubaturformel Φ zum Funktional I vom Grad m:

$$r \geq \dim \mathbb{P}_{\lfloor m/2 \rfloor}^n \tag{2.3}$$

Diese Abschätzung folgt sofort aus Lemma 1.2-(ii)-(b) und aus der Tatsache, daß $A_\Phi \cap \mathbb{P}^n_{\lfloor m/2 \rfloor} = \{0\}$ gelten muß, denn würde $P \neq 0$ in diesem Raum existieren, dann würde $I(P^2) = \Phi(P^2) \doteq 0$ folgen.

1970 hat Fritsch[5] die Existenz eines Funktionals $I \in (\Lambda^2)^+$ gezeigt, für das die Schranke in (2.3) für m = 3 exakt ist. 1971 haben Mysovskikh/Cernicina[31] das entsprechende für m = 5 gezeigt.
1976 hat Kuzmenkov[15] für beliebige n und m die Existenz von Funktionalen in $(\Lambda^n)^+$ gezeigt, für die (2.3) scharf ist.
Eine zentrale Rolle spielen dabei die in Abschnitt 1.1 betrachteten Punktmengen $Y_{n,k}$. Bezeichnet wie in 1.1 $A_{n,k}$ das zu $Y_{n,k}$ gehörende Polynomideal in $\mathbb{P}^n$, dann hat Kuzmenkov folgende Verschärfung von (1.2) angegeben:

(2.4) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_o\colon A_{n,k} \cap (\mathbb{P}^n_{2k+1})^+ = \{0\}$

Man kann diese Aussage entsprechend der in Kuzmenkov[15] angegebenen Idee unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abschnitt 1.1 durch Induktion nach n wie folgt einsehen:
Für n = 1 ist (2.4) offenbar erfüllt.
Ist ein $n \geq 2$ gegeben, dann führt man eine Induktion nach k durch:
Für k = 0 ist (2.4) klar.
Sei für ein $k > 0$ ein $P \in A_{n,k} \cap (\mathbb{P}^n_{2k+1})^+$ gegeben, und sei P^* dasjenige Polynom in n - 1 Variablen, welches durch Einschränken von P auf die Hyperebene $H_{n,k}$ entsteht. Es gilt $P^* \geq 0$ und daraus folgt per Induktionsannahme (für n) $P^* = 0$. Also existiert ein gerader Index $l \in \mathbb{N}$, so daß $P = G^l Q$ gilt, wobei $G(x_1,..,x_n) = 0$ die definierende lineare Gleichung von $H_{n,k}$ ist und Q in $A_{n,k-1} \cap (\mathbb{P}^n_{2k-1})^+$ liegt. Aus der Induktionsannahme (für k) folgt

$Q = 0$ und folglich ist $P = 0$.

Ist $d := \dim \mathbb{P}_k^n$ und $y_1,..,y_d$ eine Aufzählung der Elemente von $Y_{n,k}$, dann folgt aus (2.4), daß für jede Wahl eines Vektors $a = (a_1,..,a_d)^T \in \mathbb{R}^d$ mit der Eigenschaft $a_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq d$

$$I_a^*: P \longmapsto \sum_{i=1}^{d} a_i P(y_i)$$

in $(\Lambda_{2k+1}^n)^+$ liegt. Kuzmenkov[16] hat weiterhin gezeigt, daß I^* fortgesetzt werden kann zu einem Funktional $I \in (\Lambda^n)^+$. Für jede derartige Fortsetzung ist somit (2.3) scharf.

2.3 Ein allgemeiner Konstruktionsansatz für Kubaturformeln

Wir sind an einem Ansatz für ein, für eine größere Klasse von Problemen geeignetes, Konstruktionsverfahren für Kubaturformeln interessiert. Ein wesentlicher Schritt in diese Richtung ist das zentrale Ergebnis von Schmid[37], nämlich, für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ und $I \in (\Lambda^n)^+$, eine Charakterisierung derjenigen endlichen Polynomsysteme in $\mathbb{P}^n$, deren erzeugtes Ideal das zu einer interpolatorischen Kubaturformel zum Funktional I vom Grad m gehörende Ideal ist. Hat man eine konstruktive Charakterisierung dieser Polynomsysteme, dann hat man auch einen direkten Zugang zur Konstruktion von Kubaturformeln, wie in Abschnitt 1.2 dargestellt wurde. Wir beweisen hier eine Erweiterung dieses Ergebnisses von Schmid, und wir werden sehen, daß diese Erweiterung wesentlich ist.

Satz 2.1:

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $I \in (\Lambda^n)^{++}$ gegeben. Ist A ein Ideal in $\mathbb{P}^n$, welches ein fundamentales System vom Grad m enthält, ist $U \subset \mathbb{P}^n_m$ ein algebraisches Komplement von A in $\mathbb{P}^n$ und sind Π_U bzw. Π_A die Projektionen auf U bzw. A, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine interpolatorische Kubaturformel Φ zum Funktional I mindestens vom Grad m, deren Knoten Nullstellen von A sind.

(ii) Es gilt:

(a) Die symmetrische Bilinearform

$$\Theta : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto I(\Pi_U(PQ))$$

ist positiv semidefinit.

(b) $\forall P \in A \cap \mathbb{P}^n_m$: $I(P) = 0$.

Beweis:

Aus (i) folgt (ii):

Für alle $P \in \mathbb{P}^n$ gilt:

$$\Theta(P,P) = I(P^2 - \Pi_A(P^2)) = \Phi(P^2) \geq 0.$$

Für alle $P \in A \cap \mathbb{P}^n_m$ gilt:

$$I(P) = \Phi(P) = 0.$$

Aus (ii) folgt (i):

Sei $A^* := \{P \in \mathbb{P}^n / \Theta(P,P) = 0\}$.

(1) A^* ist ein Ideal in $\mathbb{P}^n$ und es gilt $A \subset A^*$:

Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz zeigt man für alle S_1, $S_2 \in A^*$ und für alle P_1, $P_2 \in \mathbb{P}^n$:

$$(\Theta(S_i P_i, S_i P_i))^2 = (\Theta(S_i, S_i P_i^2))^2 \leq$$
$$\leq \Theta(S_i, S_i)\, \Theta(S_i P_i^2, S_i P_i^2) = 0 \text{ für } i = 1,2,$$

woraus

$$(\Theta(S_1P_1,S_2P_2))^2 \leq \Theta(S_1P_1,S_1P_1)\Theta(S_2P_2,S_2P_2) = 0$$

und somit

$$\Theta(S_1P_1 + S_2P_2, S_1P_1 + S_2P_2) = 0$$

folgt.

Jedes $P \in A$ gehört natürlich wegen $\Theta(P,P) = I(0)$ zu A^*.

(2) Für alle $P \in A^* \cap \mathbb{P}^n_m$ gilt $I(P) = 0$, denn:

$$(I(P))^2 = (I(\Pi_U(P)))^2 = (\Theta(1,P))^2 \leq \Theta(1,1)\Theta(P,P) = 0.$$

(3) A^* ist ein reelles Ideal:

Sei $Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_l^2 \in A^*$ gegeben. Auf Grund des Satzes von Dubois/Efroymson/Risler (vgl. Abschnitt 1.2) ist zu zeigen: Für jedes $1 \leq i \leq l$ liegt bereits Q_i in A^*.

Da für jedes $P \in A^*$ auch $\Pi_U(P) = P - \Pi_A(P)$ zu A^* gehört, so folgt aus

$$\sum_{i=1}^{l} (\Pi_U(Q_i))^2 = \sum_{i=1}^{l} (Q_i - \Pi_A(Q_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} Q_i^2 - 2\sum_{i=1}^{l} Q_i\Pi_A(Q_i) + \sum_{i=1}^{l} (\Pi_A(Q_i))^2 \in A^*$$

und aus (2):

$$0 = I(\Pi_U(\sum_{i=1}^{l} (\Pi_U(Q_i))^2)) = \sum_{i=1}^{l} I(\Pi_U((\Pi_U(Q_i))^2)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \Theta(\Pi_U(Q_i),\Pi_U(Q_i)).$$

Somit gehört für jedes $1 \leq i \leq l$ $\Pi_U(Q_i)$ zu A^* und damit auch Q_i zu A^*. Folglich ist A^* ein reelles Ideal in $\mathbb{P}^n$.

(4) Ist $U^* \subset \mathbb{P}_m^n$ ein algebraisches Komplement von A^* in $\mathbb{P}^n$, dann hat A^* nach Lemma 1.2-(ii)-(b) genau $s := \dim U^*$ reelle, paarweise verschiedene Nullstellen $k_1,..,k_s$. Ist $U_1^*,..,U_s^*$ eine Basis von U^*, dann ergibt Lemma 1.2-(ii)-(a) die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung $(c_1,..,c_s)^T$ von

$$\sum_{i=1}^{s} c_i U_j^*(k_i) = I(U_j^*), \quad 1 \leq j \leq s.$$

Wegen (2) ist

$$\Phi : P \longmapsto \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq 0}}^{s} c_i P(k_i)$$

eine Darstellung zum Funktional I mindestens vom Grad m. Eine erneute Anwendung von Lemma 1.2-(ii)-(a) zeigt die Existenz von Polynomen T_i, $1 \leq i \leq s$, in U^* mit der Eigenschaft $T_i(k_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i,j \leq s$. Aus

$$0 < \Theta(T_i,T_i) = I(\Pi_U(T_i^2)) = \Phi(T_i^2) = c_i T_i^2(k_i)$$

folgt die Positivität der c_i und folglich ist Φ eine Kubaturformel zum Funktional I mindestens vom Grad m, und A^* ist das zur Formel gehörende Ideal. //

Die dem zentralen Teil (3) dieses Beweises zugrundeliegende Idee haben wir aus dem Beweis des bereits erwähnten Satzes von Schmid [37] übernommen.

Die (strikte) Quadratpositivität von I wurde im Beweis nicht benötigt, d.h. die Eigenschaften aus(ii) im Satz 2.1 sind hinreichende Bedingungen für ein Funktional $I \in \Lambda^n$ dafür, daß $I_{|\mathbb{P}_m^n}$ im Abschluß von $(\Lambda_m^n)^+$ liegt!

Um Satz 2.1 für die Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad m für ein Funktional $I \in (\Lambda^n)^{++}$ anzuwenden, startet man mit t, $t \geq n$, Polynomen $R_1,..,R_t$, die jeweils mindestens den Grad $\lceil m/2 \rceil$ haben und deren erzeugtes Ideal A ein fundamentales System vom Grad m + 1 enthält. Es tritt dann das in der Regel schwierige Problem auf, den Raum $A \cap \mathbb{P}_m^n$ zu bestimmen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, versucht man die Polynome so zu wählen, daß sie eine H-Basis von A bilden. $R_1,..,R_t$ ist genau dann eine H-Basis von A, wenn jedes $P \in A$ eine Darstellung $\sum_{i=1}^{t} Q_i R_i$ mit $Grad(Q_i R_i) \leq Grad(P)$ für jedes $1 \leq i \leq t$ besitzt. Der Begriff H-Basis wurde von Macaulay[18] eingeführt und Möller[19] hat die Bedeutung dieser Basen für das Kubaturproblem erkannt.

Von Möller[19] übernehmen wir weiterhin folgende Bezeichnung: Ein Polynom $P \in \mathbb{P}^n$ heißt m-orthogonal bezüglich eines Funktionals $I \in (\Lambda^n)^{++}$ genau dann, wenn für jedes $Q \in \mathbb{P}^n$ mit $Grad(QP) \leq m$ $I(PQ) = 0$ gilt.

Ist $R_1,..,R_t$ eine H-Basis von A, dann gilt für ein $I \in (\Lambda^n)^{++}$ offenbar genau dann $I(P) = 0$ für alle $P \in A \cap \mathbb{P}_m^n$, wenn für jedes $1 \leq i \leq t$ R_i m-orthogonal bezüglich I ist.

Wir können jetzt folgendes allgemeine Verfahren zur Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad m für ein Funktional $I \in (\Lambda^n)^{++}$ formulieren:

Konstruktionsverfahren 2.2:

(1) Man startet mit t, $t \geq n$, bezüglich I m-orthogonalen Polynomen $R_1,..,R_t$, die eine H-Basis des von ihnen erzeugten Ideals bilden. Weiterhin sind sie so gewählt, daß A ein fundamentales System vom Grad m + 1 enthält.

(2) Berechnen einer Basis $U_1,..,U_s$ eines algebraischen Komplements U von $A \cap \mathbb{P}_m^n$ in $\mathbb{P}_m^n$. Ist die Matrix

$$\Theta^* := (\Theta(U_i U_j))_{1 \leq i,j \leq s}$$

positiv semidefinit, dann ——> (3), ansonsten existiert keine Kubaturformel zum Funktional I mindestens vom Grad m, deren zugehöriges Ideal die Polynome $R_1,..,R_t$ enthält.

(3) (a) Berechnen der reellen Nullstellen $k_1,..,k_q$ von A.

(b) Berechnen der eindeutig bestimmten Lösung von

$$\sum_{i=1}^{q} c_i U_j(k_i) = I(U_j), \quad 1 \leq j \leq s. \tag{2.5}$$

Als Ergebnis erhalten wir eine interpolatorische Kubaturformel

$$\Phi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq 0}}^{q} c_i P(k_i)$$

zum Funktional I mindestens vom Grad m.

Die Berechnung von $U_1,..,U_s$ im Schritt (2) ist ein lineares Problem, da $R_1,..,R_t$ eine H-Basis von A ist.

Zur Berechnung der Elemente der Matrix Θ^* greifen wir auf eine Idee von Schmid zurück: Da A ein fundamentales System vom Grad m + 1 enthält, existiert für alle $1 \leq i,j \leq s$ ein $S_{ij} \in A$, so daß $U_i U_j - S_{ij}$ in $\mathbb{P}_m^n$ liegt. Es gilt dann $\Theta(U_i U_j) = I(U_i U_j - S_{ij})$, da $S_{ij}^* := \mathbb{I}_U(U_i U_j) - (U_i U_j - S_{ij})$ in $A \cap \mathbb{P}_m^n$ liegt und somit $I(S_{ij}^*) = 0$ gilt.

Die Existenz einer Lösung von (2.5) folgt aus Satz 2.1, ihre Eindeutigkeit folgt aus Lemma 1.2-(ii)-(a).

Schreibt man den Satz von Schmid[37, Satz 2] auf unsere Situation um, dann kann man ihn wie folgt formulieren:

Korollar 2.3:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(i) A ist das zu einer interpolatorischen Kubaturformel zum Funktional I mindestens vom Grad m gehörende Ideal.

(ii) Es gilt:

(a) Die symmetrische Bilinearform

$$\Theta: U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(P,Q) \longmapsto I(\Pi_U(PQ))$$

ist positiv definit.

(b) $\forall\, P \in A \cap \mathbb{P}^n_m$: $I(P) = 0$

Der Charakterisierungssatz von Schmid deckt also genau die Fälle in Satz 2.1 ab, für die das Ideal $A^* = \{P \in \mathbb{P}^n / \Theta(P,P) = 0\}$ mit dem Ideal A übereinstimmt.

Die Stärke des aus dem Satz 2.1 resultierenden Konstruktionsverfahrens 2.2 besteht unter anderem darin, daß man die Menge $A^* \backslash A$ nicht kennen muß, um überprüfen zu können, ob $R_1,\ldots,R_t$ geeignet gewählt wurden. Im konkreten Verfahren macht sich dieser Vorteil dadurch bemerkbar, daß man auf das Lösen eines zusätzlichen nichtlinearen Gleichungssystems verzichten kann.

II. KUBATURFORMELN IM $\mathbb{R}^2$

Wir werden uns im weiteren ausschließlich mit dem zweidimensionalen Kubaturproblem (d.h. n = 2) und den damit zusammenhängenden Fragestellungen befassen.
Die Variablen bezeichnen wir mit x und y, und wir verzichten in allen Bezeichnungen auf den Dimensionsindex n, d.h. wir schreiben an Stelle von $\mathbb{P}^n$ und Λ^n $\mathbb{P}$ und Λ und wir verfahren in den anderen Fällen ganz entsprechend.
Als Leitfaden für unser weiteres Vorgehen dient uns das Konstruktionsverfahren 2.2. Die folgenden zwei Abschnitte sind den zwei Eckpfeilern dieser allgemeinen Konstruktionsmethode gewidmet: H-Basen von Polynomidealen, die ein fundamentales System enthalten (algebraischer Aspekt), und orthogonalen Polynomen (Positivität). In den Abschnitten 6 und 7 werden wir darauf aufbauend zwei Methoden zur konstruktiven Charakterisierung von Klassen von Kubaturformeln entwickeln und zugehörige Beispiele rechnen. Im eingeschobenen Abschnitt 5 widmen wir uns dem Problemkreis "Kubaturformeln mit minimaler Knotenanzahl".

3. ÜBER H-BASEN VON POLYNOMIDEALEN

Wir wollen hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß eine endliche Polynommenge in $\mathbb{P}$ H-Basis des von ihr erzeugten Ideals ist, wobei stets die Nebenbedingung zu beachten ist, daß das erzeugte Ideal ein fundamentales System enthält. Zuvor wollen wir noch ein paar charakteristische Beispiele vorstellen:

Beispiel 1:

Das Polynomsystem

$$P_1(x,y) := x^2 + y^2 - 1,$$

$$P_2(x,y) := x^2y - y,\ P_3(x,y) := xy^2 - x$$

ist keine H-Basis des erzeugten Ideals, denn das Polynom $P^* := xyP_1 - yP_3 - xP_2 = xy$ kann nicht wie gefordert dargestellt werden.

Beispiel 2:

Das Polynomsystem

$$P_1(x,y) := xy,$$

$$P_2(x,y) := x^3 - x,\ P_3(x,y) := y^3 - y$$

ist eine H-Basis des erzeugten Ideals.

Beispiel 3:

Das Polynomsystem

$$P_1(x,y) := x^3 - 3x^2 + ax,$$

$$P_2(x,y) := x^2y - xy,\ P_3(x,y) := xy^2 - xy,$$

$$P_4(x,y) := y^3 - 3y^2 + ay$$

ist genau dann eine H-Basis des erzeugten Ideals, wenn $a = 2$ ist.

Beispiel 4:

Das Polynomsystem

$$P_1(x,y) := x^3 + xy^2 - x,\ P_2(x,y) := y^3 - y$$

ist eine H-Basis des erzeugten Ideals.

Wir führen folgende Projektion in $\mathbb{P}$ ein:

$$\Pi_k : \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} x^{i-j} y^j \longmapsto \begin{cases} 0 & m < k \\ \sum_{j=0}^{k} a_{kj} x^{k-j} y^j & \text{sonst} \end{cases}$$

Π_k liefert also von einem Polynom genau die Terme k-ten Grades.

Satz 3.1:

Ist $R_0,..,R_s$ ein fundamentales System vom Grad s in $\mathbb{P}$, $\{Q_1,..,Q_r\}$ eine Menge von Polynomen in $\mathbb{P}_{s-1}$, ist S die lineare Hülle von $R_0,..,R_s,Q_1,..,Q_r$ in $\mathbb{P}$, A das von diesen Polynomen in $\mathbb{P}$ erzeugte Ideal und gilt

(3.1) $\quad SPAN(\{xR_i, yR_i / 0 \leq i \leq s\}) \cap \mathbb{P}_s \subset S$, und

(3.2) jedes Polynom $\sum_{i=1}^{r} S_i Q_i$ mit $S_i \in \mathbb{P}$ und $Grad(S_i Q_i) \leq s$ für alle $1 \leq i \leq r$ gehört zu S,

dann hat A folgende Eigenschaft:

(3.3) $\quad A \cap \mathbb{P}_s = S.$

Hat weiterhin $H^* = \{H_1,..,H_m\} \subset S$ die Eigenschaft, daß jedes Polynom P in S eine Darstellung $P = \sum_{i=1}^{m} P_i H_i$ mit $Grad(P_i H_i) \leq Grad(P)$ für alle $1 \leq i \leq m$ besitzt, dann ist H^* eine H-Basis von A.

Beweis:

O.B.d.A. haben die R_i folgende Gestalt:

$$R_i = x^{s-i} y^i + V_i, \quad V_i \in \mathbb{P}_{s-1}, \quad 0 \leq i \leq s.$$

Aus (3.1) folgt dann:

(3.1') $\qquad \forall\, 1 \leq i \leq s: \; yR_{i-1} - xR_i \in S.$

Wir zeigen zunächst:

Bezeichnet man mit B die Teilmenge von $\mathbb{P}$, die für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

genau die Polynome

$$x^k R_i,\ 0 \le i \le s-1 \text{ und } x^{k-j}y^j R_s,\ 0 \le j \le k,$$

enthält, und mit A^* die lineare Hülle von $B \cup \{Q_1,..,Q_r\}$, dann gilt:

$$A = A^*. \tag{3.4}$$

Aus (3.2) folgert man mit einem einfachen Induktionsargument

$$\forall\, u,v \in \mathbb{N}_0\ \forall\, 1 \le i \le r\ \exists\, a_1,..,a_r \in \mathbb{R}:$$

$$x^u y^v Q_i = \sum_{i=1}^{r} a_i Q_i + R, \quad \text{mit} \tag{3.5}$$

$$R = \begin{cases} 0, & \text{falls } m := u + v + \mathrm{Grad}(Q_i) < s, \\ \sum_{j=0}^{s} T_j R_j & \text{sonst, mit } \max_{0 \le j \le s} \mathrm{Grad}(T_j R_j) \le m, \end{cases}$$

und daher genügt es, zu zeigen:

$$\forall\, 0 \le i \le s-1\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, 1 \le l \le k:$$

$$x^{k-l}y^l R_i \in A^* \tag{3.6}$$

Wir beweisen (3.6) durch Induktion nach k:

Für k = 1 erhalten wir (3.6) sofort aus (3.1').

Ist $k > 1$, $0 \le i \le s-1$ und $1 \le l \le k$, dann folgt aus (3.1')

$$x^{k-l}y^{l-1}(yR_i) = x^{k-l+1}y^{l-1}R_{i+1} + T,$$

wobei T wegen (3.5) per Induktionsannahme in $A^* \cap \mathbb{P}_{s+k-1}$ liegt.

Führt man diesen Schritt h-mal durch mit $h := \min\{s-i,l\}$, dann erhält man

$$x^{k-l}y^l R_i = x^{k-l+h}y^{l-h}R_{i+h} + T^*$$

mit $T^* \in A^* \cap \mathbb{P}_{s+k-1}$, womit wir (3.6) und damit auch (3.4) gezeigt haben.

Jedes $P \in A$ besitzt also eine Darstellung

$$P = \sum_{i=1}^{r} a_i Q_i + \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{s-1} b_{ij} x^i R_j + \sum_{j=0}^{i} c_{ij} x^{i-j} y^j R_s \right) \tag{3.7}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt

$$\sum_{j=0}^{s-1} b_{kj}^2 + \sum_{j=0}^{k} c_{kj}^2 > 0, \tag{3.8}$$

dann folgt $\Pi_{s+k}(P) \neq 0$ und somit ist der Grad von P gleich s + k. Folglich gilt die Aussage (3.3).

Ist für jedes $0 \leq j \leq s$ eine Darstellung

$$R_j = \sum_{\nu=1}^{m} U_{j\nu} H_\nu \text{ mit}$$

$$GRAD(U_{j\nu} H_\nu) \leq s, \; 1 \leq \nu \leq m$$

von R_j gegeben, dann holt man sich ohne Schwierigkeiten den zweiten Teil der Behauptung aus (3.7). //

Ist ein fundamentales System

$$R_i = x^{s-i} y^i + V_i, \; 0 \leq i \leq s, \; V_i \in \mathbb{P}_{s-1}$$

vom Grad s gegeben, dann gilt:

$SPAN(\{xR_i, yR_i / \; 0 \leq i \leq s\}) \cap \mathbb{P}_s = Span(\{xR_i - yR_{i-1} / \; 1 \leq i \leq s\})$,

denn ist $Q := \sum_{i=0}^{s} a_i xR_i + \sum_{i=0}^{s} b_i yR_i$ gegeben, dann liegt Q genau dann in $\mathbb{P}_s$, wenn $a_0 = b_k = 0$ und $a_i = -b_{i-1}$, $1 \leq i \leq s$ gilt, woraus $Q = \sum_{i=1}^{s} a_i (xR_i - yR_{i-1})$ folgt.

Als direkte Folgerung von Satz 3.1 erhalten wir zwei für das Kubaturproblem wichtige Klassen von H-Basen.

Korollar 3.2:

Ist ein fundamentales System

$$R_i = x^{k-i} y^i + P_i, \; 0 \leq i \leq k, \; P_i \in \mathbb{P}_{k-1}$$

in $\mathbb{P}_k$ gegeben und gilt für jedes $1 \leq i \leq k$

$$xR_i - yR_{i-1} \in \mathrm{SPAN}(\{R_0,..,R_k\}),$$

dann gilt für das von $R_0,..,R_k$ in $\mathbb{P}$ erzeugte Ideal A

$$A \cap \mathbb{P}_{k-1} = \{0\},$$

und $R_0,..,R_k$ ist eine H-Basis von A.

Die Aussage von Korollar 3.2 ist im wesentlichen bekannt (vgl. Morrow/Patterson[21] und auch Schmid[34]). Beispiel 3 fällt in diese Klasse von H-Basen.

Korollar 3.3:

Ist ein fundamentales System

$$R_i = x^{k+1-i}y^i + P_i,\ 0 \le i \le k+1,\ P_i \in \mathbb{P}_{k-1}$$

in $\mathbb{P}_{k+1}$ gegeben und gilt für die Polynome $Q_i := xR_{i+1} - yR_i$, $0 \le i \le k$:

$$xQ_i,\ yQ_i \in \mathrm{Span}(\{R_0,..,R_{k+1}\}),$$

dann gilt für das von $Q_o,..,Q_k,R_0,..,R_{k+1}$ in $\mathbb{P}$ erzeugte Ideal A

$$A \cap \mathbb{P}_k = \mathrm{SPAN}(\{Q_0,..,Q_k\})$$

und $Q_0,..,Q_k,R_0,..,R_{k+1}$ ist eine H-Basis von A.

Die Aussage von Korollar 3.3 ist ebenfalls im wesentlichen bekannt. Morrow/Patterson[21] haben sie in ihrer Arbeit benutzt, und Schmid[37] hat mit H-Basen gearbeitet, die sich von den hier vorgestellten dadurch unterscheiden, daß der Raum $A \cap \mathbb{P}_k$ in der Regel noch weitere Polynome enthält. Das zweite Beispiel läßt sich mit Korollar 3.3 behandeln, indem man $R_0 := P_2$, $R_1 := xP_1$, $R_2 := yP_1$, $R_3 := P_3$ setzt.
Beispiel 4 gehört zu einer Klasse von H-Basen, die wir in Abschnitt 6, als weitere Folgerung von Satz 3.1, beschreiben werden.

4. ORTHOGONALE POLYNOME IN ZWEI VARIABLEN

4.1 Elementare Eigenschaften

Wir bezeichnen in diesem Abschnitt mit I ein durch $I(1) = 1$ normiertes, lineares, strikt quadratpositives Funktional auf dem Raum $\mathbb{P}$ der reellen Polynome in den zwei Variablen x und y. Durch

$$S: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto I(PQ)$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ definiert, und somit ist die Familie $((P_i^k)_{0 \le i \le k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ der bezüglich S orthogonalen Polynome durch

(i) $P_i^k = x^{k-i}y^i + Q_{ki}$ mit $\mathrm{Grad}(Q_{ki}) < k$,

(ii) $\forall\, Q \in \mathbb{P}_{k-1}: I(P_i^k Q) = 0$

eindeutig definiert.

Die Bedeutung der orthogonalen Polynome für das Kubaturproblem liegt darin begründet, daß ein Polynom $P \in \mathbb{P}$ vom Grad $s \le m$ genau dann m-orthogonal ist, wenn es sich wie folgt darstellen läßt:

$$P = \sum_{k=m-s+1}^{s} \sum_{i=0}^{k} a_{ki} P_i^k .$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$P_{i..j}^k := (P_i^k, P_{i+1}^k, .., P_j^k)^T, \quad k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le i \le j \le k,$$
$$P_*^k := P_{0..k}^k .$$

Ist für ein $k \in \mathbb{N}$ Id die Identität in $\mathbb{R}^{k \times k}$ und $\mathcal{O}$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^k$, dann definieren wir folgende Matrizen (dargestellt als Blockmatrizen):

$$T_k^R := [Id, \mathcal{O}] \in \mathbb{R}^{k\times k+1},$$

$$T_k^L := [\mathcal{O}, Id] \in \mathbb{R}^{k\times k+1},$$

$$T_k^O := \begin{bmatrix} \mathcal{O}^T \\ Id \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1\times k},$$

$$T_k^U := \begin{bmatrix} Id \\ \mathcal{O}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1\times k}.$$

Je nachdem, ob man eine gegebene Matrix A mit einer dieser Matrizen von links oder von rechts multipliziert, wird von A die erste bzw. letzte Zeile oder Spalte gestrichen, oder aber es wird als erste bzw. letzte Zeile oder Spalte eine Nullzeile bzw. Nullspalte angefügt.

Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $0 \leq i,j \leq k$ die Momente

$$M_{ij}^k := I(P_i^k P_j^k),\ X_{ij}^k := I(xP_i^k P_j^k) \text{ und } Y_{ij}^k := I(yP_i^k P_j^k).$$

Offenbar sind dann für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die k+1xk+1-Matrizen

$$M_k := (M_{ij}^k)_{0 \leq i,j \leq k},$$

$$X_k := (X_{ij}^k)_{0 \leq i,j \leq k} \text{ und } Y_k := (Y_{ij}^k)_{0 \leq i,j \leq k}$$

symmetrisch, und wegen

$$(a_0,..,a_k)M_k(a_0,..,a_k)^T = I((\sum_{i=0}^{k} a_i P_i^k)^2)$$

ist M_k auch positiv definit.

Die Rekursionsformeln der orthogonalen Polynome:

Aus $xP_i^k - P_i^{k+1} \in \mathbb{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq k$, folgt die Existenz von eindeutig bestimmten Koeffizienten a_{mj}^{ki}, so daß folgendes gilt:

$$xP_i^k - P_i^{k+1} = \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} a_{mj}^{ki} P^m_j$$

Da für $k \geq 2$ $xP_i^k - P_i^{k+1}$ orthogonal zu $\mathbb{P}_{k-2}$ ist, folgt $a_{mj}^{ki} = 0$ für alle $0 \leq m \leq k-2$ und $0 \leq j \leq m$. Eine entsprechende Argumentation für $yP_i^k - P_{i+1}^{k+1}$ liefert die eindeutige Existenz von Koeffizienten c_{ij}^k, d_{ij}^k, γ_{ij}^k, δ_{ij}^k, so daß folgendes gilt:

$$xP_i^k = P_i^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} c_{ij}^k P_j^k + \sum_{j=0}^{k-1} d_{ij}^k P_j^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

(4.1)

$$yP_i^k = P_{i+1}^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{ij}^k P_j^k + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{ij}^k P_j^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und

$$x = P_0^1 + c_{00}^0, \quad y = P_1^1 + \gamma_{00}^0.$$

Unter Verwendung der k+1xk+1-Matrizen

$$C_k := (c_{ij}^k)_{0 \leq i,j \leq k}, \quad \Gamma_k := (\gamma_{ij}^k)_{0 \leq i,j \leq k}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

und der k+1xk-Matrizen

$$D_k := (d_{ij}^k)_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Delta_k := (\delta_{ij}^k)_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

erhält man (4.1) in Matrizenform:

$$xP_*^k = P_{0..k}^{k+1} + C_k P_*^k + D_k P_*^{k-1},$$

(4.2)

$$yP_*^k = P_{1..k+1}^{k+1} + \Gamma_k P_*^k + \Delta_k P_*^{k-1}.$$

Multipliziert man (4.2) von rechts mit $(P_*^k)^T$ bzw. mit $(P_*^{k-1})^T$ und wertet man mit I elementweise aus, dann erhält man:

(4.3) $$X_k = C_k M_k, \quad Y_k = \Gamma_k M_k \text{ und}$$

(4.4) $$M_k T_k^U = D_k M_{k-1}, \quad M_k T_k^0 = \Delta_k M_{k-1}.$$

Wir schreiben manchmal auch $M_k^{(I)}$, $C_k^{(I)}$ usw., um die Abhängigkeit

der Marizen M_k, C_k usw. vom Funktional I auszudrücken.
Natürlich sind die bisher dargestellten Eigenschaften der orthogonalen Polynome im wesentlichen bekannt. Wir verweisen insbesondere auf die Arbeit von Kowalski[12].
Im weiteren bezeichnen wir mit $e_i^{(n)}$ den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.1:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$M_k = \sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-1-j} D_{k-i} \prod_{i=0}^{j-1} \Delta_{j-i} \Big) (e_{j+1}^{(k+1)})^T. \tag{4.5}$$

Beweis:

Induktion nach k:

$M_1 = (D_1, \Delta_1)$ wegen (4.4) und $M_0 = (1)$.
Aus (4.4) folgt weiter:

$$M_{k+1} T_k^U = D_{k+1} \sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-1-j} D_{k-i} \prod_{i=0}^{j-1} \Delta_{j-i} \Big) (e_{j+1}^{(k+1)})^T =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-j} D_{k+1-i} \prod_{i=0}^{j-1} \Delta_{j-i} \Big) (e_{j+1}^{(k+1)})^T ,$$

und die letzte Spalte von M_k ist gleich

$$\Delta_{k+1} \prod_{i=0}^{k-1} \Delta_{k-i} = \prod_{i=0}^{k} \Delta_{k+1-i}. \qquad //$$

Für k = 3 erhalten wir z.B. aus (4.5) nach erfolgter Summation:

$$M_3 = [D_3 D_2 D_1,\ D_3 D_2 \Delta_1,\ D_3 \Delta_2 \Delta_1,\ \Delta_3 \Delta_2 \Delta_1].$$

Funktionale mit Symmetrieeigenschaften:

Wir zeigen jetzt, wie sich die Invarianzeigenschaften von I über die orthogonalen Polynome charakterisieren lassen. Wir beschränken uns dabei auf Invarianzen bezüglich der Untergruppen der Transformationsgruppe D4 des Einheitsquadrates $[1,-1]^2$ in $\mathbb{R}^2$. D4 besteht aus den Spiegelungen S_x, S_y, S_{x-y}, S_{x+y}, den Drehungen D_{90}, D_{180}, D_{270} und der identischen Abbildung Id. Hierbei ist $S_{f(x,y)}$ die Spiegelung an der Geraden $f(x,y) = 0$ und D_α bezeichnet die Drehung um den Winkel α Grad. Wir bezeichnen mit $E_k := (e_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \in \mathbb{R}^{kxk}$ die Matrix mit $e_{ij} = 1$, falls $i+j = k+1$, und ansonsten mit $e_{ij} = 0$. E_k hat also genau in der Nebendiagonalen Einsen. Weiterhin definieren wir für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{mxn}$:

$$A^Z := E_m A E_n$$

A^Z entsteht also aus A, indem man A am "Mittelpunkt der Matrix" spiegelt. Dementsprechend nennen wir eine Matrix zentralsymmetrisch, wenn $A = A^Z$ gilt.

Bemerkung 4.2:

(i) Äquivalente Aussagen sind:

(a) I ist D_{180}-invariant.

(b) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o\ \forall\, 0 \leq i \leq k$: $P_i^k \circ D_{180} = (-1)^k P_i^k$.

(c) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o$: $C_k = \Gamma_k = 0$.

(ii) Äquivalente Aussagen sind:

(a) I ist S_{x-y}-invariant.

(b) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o$: $\forall\, 0 \leq i \leq k$: $P_i^k \circ S_{x-y} = P_{k-i}^k$.

(c) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o$: $\Gamma_k = (C_k)^Z$.

$\forall\, k \in \mathbb{N}$: $\Delta_k = (D_k)^Z$.

(iii) Äquivalente Aussagen sind:

(a) I ist S_y-invariant.

(b) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o\ \forall\, 0 \leq i \leq k$: $P_i^k \circ S_y = (-1)^i P_i^k$.

(c) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o\ \forall\, 0 \leq i,j \leq k$: $c_{ij}^k = 0$, falls i+j ungerade,

$\gamma_{ij}^k = 0$, falls i+j gerade.

$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, 0 \leq i \leq k\ \forall\, 0 \leq j \leq k-1$:

$d_{ij}^k = 0$, falls i+j ungerade,

$\delta_{ij}^k = 0$, falls i+j gerade.

Wir wollen exemplarisch für den Fall (i) die elementaren Überlegungen vorstellen, die zur Äquivalenz der angegebenen Aussagen führen:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Definiert man für $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq k$

$$P := P_i^k - (-1)^k P_i^k \circ D_{180},$$

dann ist der Grad von P stets kleiner als k, woraus $I(PP_i^k) = 0$ und $I(P(P_i^k \circ D_{180})) = I((P \circ D_{180})\, P_i^k) = 0$ folgt. Somit ist $I(P^2) = 0$ und damit ist (b) gezeigt.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Jedes $P \in \mathbb{P}$ hat eine Darstellung $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} P_j^i$, woraus $I(P) = a_{oo} I(1) = I(P \circ D_{180})$ folgt.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Für $k \in \mathbb{N}$ erhält man aus (4.2) mit Hilfe von (b)

$$x P_\star^k = P_{0..k}^{k+1} - C_k P_\star^k + D_k P_\star^{k-1},$$

woraus $C_k = 0$ folgt. $C_0 = 0$ und $\Gamma_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_o$, beweist man entsprechend.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Beweis durch Induktion nach k:

$$P_\star^1 \circ D_{180} = (-x, -y)^T = -P_\star^1.$$

Ist (b) für alle $k \leq l \in \mathbb{N}$ gezeigt, dann erhalten wir aus (4.2):

$$P_{0..l}^{l+1} \circ D_{180} = (x P_\star^l) \circ D_{180} - D_l P_\star^{l-1} \circ D_{180} = (-1)^{l+1} P_{0..l}^{l+1}.$$

Die entsprechende Aussage für P_{l+1}^{l+1} zeigt man ganz analog. //

Wir werden im weiteren D_{180}-invariante Funktionale zentralsymmetrisch nennen. D4-invariante Funktionale werden meist vollsymmetrisch genannt.

Beispiele:

(1) Produktfunktionale:

$I \in \Lambda^{++}$ ist ein Produktfunktional, wenn $I^{(1)}$, $I^{(2)} \in (\Lambda^1)^{++}$ existieren, so daß für alle $n,m \in \mathbb{N}_0$ folgendes gilt:

$$I(x^n y^m) = I^{(1)}(x^n) I^{(2)}(y^m).$$

Sind dann $(P_i^{(1)})_{\mathbb{N}_0}$, $(P_i^{(2)})_{\mathbb{N}_0}$ die bezüglich $I^{(1)}$ bzw. $I^{(2)}$ orthogonalen Polynome mit Koeffizient 1 beim Monom höchsten Grades, dann gilt

$$P_i^k(x,y) = P_{k-i}^{(1)}(x) P_i^{(2)}(y).$$

Definiert man für $\nu = 1,2$

$$c_i^{(\nu)} := I^{(\nu)}(x(P_i^{(\nu)})^2)/I^{(\nu)}((P_i^{(\nu)})^2), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

$$d_i^{(\nu)} := I^{(\nu)}((P_i^{(\nu)})^2)/I^{(\nu)}((P_{i-1}^{(\nu)})^2), \quad i \in \mathbb{N},$$

dann folgt aus

$$xP_i^k = (xP_{k-i}^{(1)})P_i^{(2)} = (P_{k-i+1}^{(1)} + c_{k-i}^{(1)} P_{k-i}^{(1)} + d_{k-i}^{(1)} P_{k-i-1}^{(1)}) P_i^{(2)}$$
$$= P_i^{k+1} + c_{k-i}^{(1)} P_i^k + d_{k-i}^{(1)} P_i^{k-1},$$

wobei wir $d_0^{(1)} P_k^{k-1} = d_0^{(1)} P_{-1}^{(1)} := 0$ definieren,

und aus der entsprechenden Gleichung für yP_i^k:

$$C_k = \mathrm{diag}(c_k^{(1)}, c_{k-1}^{(1)}, \ldots, c_1^{(1)}, c_0^{(1)}),$$

$$\Gamma_k = \mathrm{diag}(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, \ldots, c_{k-1}^{(2)}, c_k^{(2)}),$$

$$D_k = T_k^U \mathrm{diag}(d_k^{(1)}, d_{k-1}^{(1)}, \ldots, d_1^{(1)}),$$

$$\Delta_k = T_k^O \mathrm{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_k^{(2)}).$$

Aus Lemma 4.1 erhalten wir

$$M_k = \mathrm{diag}(M_0^k, M_1^k, \ldots, M_k^k),$$

mit

$$M_i^k = \prod_{\nu=1}^{k-i} d_\nu^{(1)} \prod_{\nu=1}^{i} d_\nu^{(2)}.$$

Wir betrachten folgende spezielle Produktfunktionale:

$$I_{PL}(P) := \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(x,y)\, dxdy,$$

$$I_{PU}(P) := \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(x,y)((1-x^2)(1-y^2))^{1/2}\, dxdy,$$

$$I_{PT}(P) := \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(x,y)((1-x^2)(1-y^2))^{-1/2}\, dxdy,$$

$$I_{PH}(P) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$

Alle diese Funktionale sind D4-invariant, das heißt, es gilt $d_k^{(2)} = d_k^{(1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $C_k = \Gamma_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin erfüllen sie unsere Normierungsbedingung $I(1) = 1$. Die weiteren uns interessierenden Eigenschaften haben wir in der Tabelle unten zusammengestellt. Wir bezeichnen dabei mit

L_i das i-te Legendre-Polynom,

H_i " " Hermite- " ,

T_i " " Tschebyscheff-Polynom 1.Art,

U_i " " " " 2. " ,

wobei diese Polynome stets so normiert sind, daß der Koeffizient beim Monom höchsten Grades gleich 1 ist.

Die Daten für die Funktionale I_{PL}, I_{PT}, I_{PU} haben wir aus der Arbeit Linden/Kroll/Schmid[17] übernommen.

Funktional	P_i^k	d_k	M_i^k
I_{PL}	$L_{k-i}L_i$	$\frac{k^2}{(2k+1)(2k-1)}$	$\frac{2^{2k}}{(2i+1)(2k-2i+1)\left(\binom{2k-2i}{k-i}\binom{2i}{i}\right)^2}$
I_{PT}	$T_{k-i}T_i$	$\frac{1}{2}$ falls $k=1$ $\frac{1}{4}$ sonst	für $k \geq 1$: 2^{2-2k}, $1 \leq i \leq k-1$ 2^{1-2k}, $i = 0,k$
I_{PU}	$U_{k-i}U_i$	$\frac{1}{4}$	2^{-2k}
I_{PH}	$H_{k-i}H_i$	$\frac{k}{2}$	$\frac{(k-i)!i!}{2^k}$

(2) Integration über den Kreis:

Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$I_D(P) := \frac{1}{\pi}\int_D P(x,y)\, d\lambda_2 \text{ für } P \in \mathbb{P},$$

wobei λ_2 das Lebesque-Maß im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aus der D4-Invarianz von I_D folgt:

$M_{ij}^k = 0$, falls $i+j$ ungerade ist,

$M_{ij}^k = M_{k-ik-j}^k$ für alle $0 \leq i,j \leq k$;

$P_{k-i}^k(x,y) = P_i^k(y,x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq k$;

$C_i = \Gamma_i = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$;

$\Delta_i = D_i^Z$, $i \in \mathbb{N}$.

Die orthogonalen Polynome und zugehörige Daten bis einschließlich $k = 4$ sind wie folgt bestimmt:

$P_0^1 = x$; $P_0^2 = x^2 - 1/4$, $P_1^2 = xy$;

$P_0^3 = x^3 - x/2$, $P_1^3 = x^2y - y/6$;

$P_0^4 = x^4 - 3/4x^2 + 1/16$, $P_1^4 = x^3y - 3/8xy$,

$$P_2^4 = x^2y^2 - 1/8(x^2 + y^2) + 1/48.$$

$$M_0^1 = 1/4;\ M_0^2 = 1/16,\ M_1^2 = 1/24,\ M_{02}^2 = -1/48;$$

$$M_0^3 = 1/64,\ M_1^3 = 5/576,\ M_{02}^3 = -1/192.$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix},\ D_2 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ D_3 = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Integration über dem Dreieck:

Sei $T_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x,y \leq 1,\ x+y \leq 1\}$ und

$$I_{T2}(P) := \frac{1}{2}\int_{T2} P(x,y)\, d\lambda_2 \text{ für } P \in \mathbb{P}.$$

Aus der S_{x-y}-Invarianz von I_{T2} folgt:

$$M_{ij}^k = M_{k-ik-j}^k \text{ für alle } 0 \leq i,j \leq k;$$

$$P_{k-i}^k(x,y) = P_i^k(y,x);$$

$$\Delta_i = D_i^Z,\ i \in \mathbb{N};\ \Gamma_i = C_i^Z,\ i \in \mathbb{N}_0.$$

Die orthogonalen Polynome und zugehörige Daten sind wie folgt bestimmt:

$$P_0^1 = x - 1/3;$$

$$P_0^2 = x^2 - 4/5x + 1/10,\ P_1^2 = xy - (x+y)/5 + 1/20,$$

$$P_0^3 = x^3 - 9/7x^2 + 3/7x - 1/35,$$

$$P_1^3 = x^2y - x^2/7 - 4/7xy + 2/21x + 1/21y - 1/105;$$

$$P_0^4 = x^4 - 16/9x^3 + x^2 - 4/21x + 1/126,$$

$$P_1^4 = x^3y - x^3/9 - x^2y + x^2/8 + xy/4 - x/28 - y/84 + 1/504,$$

$$P_2^4 = x^2y^2 - 4/9(x^2y + xy^2) + (x^2 + y^2)/36 + 2/9xy - (x + y)/63 + 1/756.$$

$$M_0^1 = 1/18,\ M_{01}^1 = -1/36;$$

$$M_0^2 = 1/300,\ M_{01}^2 = -1/600,\ M_{02}^2 = 1/900,\ M_1^2 = 7/3600;$$

$$M_0^3 = 1/4900,\ M_{01}^3 = -1/9800,\ M_{02}^3 = -1/14700,$$
$$M_{03}^3 = -1/19600,\ M_1^3 = 13/132300,\ M_{12}^3 = -43/529200.$$

$$D_1 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad D_2 = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ -5 & 8 \\ 2 & -8 \end{pmatrix},\quad D_3 = \frac{1}{1176}\begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ -11 & 50 & 0 \\ 2 & -32 & 18 \\ 0 & 18 & -27 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad C_1 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\quad C_2 = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ -2 & 13 & 0 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$C_3 = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 7 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Abschnitt stellen wir ein weiteres Beispiel eines S_{x-y}-invarianten Funktionals vor.

Zur Berechnung der hier und in Abschnitt 5 angegebenen orthogonalen Polynome und der zugehörigen Daten haben wir ein Programm im Computer-Algebra-System muMath/muSimp-80™ - CP/M™ Version von "The Soft Warehouse" - geschrieben.

4.2 Eine Charakterisierung von strikt quadratpositiven linearen Funktionalen über die Rekursionsformeln der orthogonalen Polynome

Kowalski[13] hat eine Charakterisierung von Polynomfolgen $((S_i^k)_{0 \leq i \leq k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{P}$ angegeben, die das orthogonale System bezüglich eines Funktionals $I \in \Lambda^{++}$ im Sinne von Abschnitt 4.1 sind. Diese Charakterisierung besteht im wesentlichen darin, daß die Existenz von Rekursionsformeln vom Typ (4.1) und eine zusätzliche Eigenschaft, die der strikten Positivität der Matrizen M_k entspricht, gefordert wird. Diese Aussage ist zu schwach für unser Anliegen, da wir, wie wir später sehen werden, an notwendigen und hinreichenden Bedingungen interessiert sind, welchen Matrizen C_k, Γ_k, D_k, Δ_k genügen müssen, damit über Beziehungen vom Typ (4.2) ein Polynomsystem $S := ((S_i^k)_{0 \leq i \leq k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{P}$ und über dieses ein Funktional $I_S \in \Lambda^{++}$ definiert wird, bezüglich dem S das orthogonale System ist.

Wir verwenden im weiteren die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1. Als erstes zeigen wir, daß die Matrizen D_k, Δ_k, C_k, Γ_k in (4.2) folgende Eigenschaften haben:

(4.6) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die k+1xk+1-Matrix

$$\sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-1-j} D_{k-i} \prod_{i=0}^{j-1} \Delta_{j-i} \Big) (e_{j+1}^{(k+1)})^T$$

symmetrisch und positiv definit.

(4.7) $\forall\, k \in \mathbb{N}: \; D_{k+1}\Delta_k = \Delta_{k+1}D_k,$

(4.8) $\forall\, k \in \mathbb{N}: \; C_k\Delta_k - \Gamma_k D_k = \Delta_k C_{k-1} - D_k\Gamma_{k-1},$

(4.9) $\forall\, k \in \mathbb{N}: \; T_k^R\Gamma_k - T_k^L C_k = \Gamma_{k-1}T_k^R - C_{k-1}T_k^L,$

(4.10) $\delta^1_{00} = d^1_{10}$,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \; T^R_{k+1}\Delta_{k+1} - T^L_{k+1}D_{k+1} = \Gamma_k C_k - C_k\Gamma_k + \Delta_k T^R_k - D_k T^L_k.$$

(4.6) erhält man aus der Symmetrie und der positiven Definitheit von M_k und aus Lemma 4.1.

Die Beziehungen (4.7) und (4.8) ergeben sich aus der Forderung, daß für jedes $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ die Komponenten des Vektors

$$xP^k_{1..k} - yP^k_{0..k-1}$$

orthogonal zu $\mathbb{P}_{k-2}$ sein müssen:

$$xP^k_{1..k} - yP^k_{0..k-1} = x(yP^{k-1}_* - \Gamma_{k-1}P^{k-1}_* - \Delta_{k-1}P^{k-2}_*) -$$

$$- y(xP^{k-1}_* - C_{k-1}P^{k-1}_* - D_{k-1}P^{k-2}_*) =$$

$$= (C_{k-1}T^L_k - \Gamma_{k-1}T^R_k)P^k_* +$$

$$+ (C_{k-1}\Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1}C_{k-1} + D_{k-1}T^L_{k-1} - \Delta_{k-1}T^R_{k-1})P^{k-1}_*$$

$$+ (C_{k-1}\Delta_{k-1} - \Gamma_{k-1}D_{k-1} + D_{k-1}\Gamma_{k-2} - \Delta_{k-1}C_{k-2})P^{k-2}_*$$

$$+ (D_{k-1}\Delta_{k-2} - \Delta_{k-1}D_{k-2})P^{k-3}_*$$

(Der letzte Summand tritt für k=2 nicht auf!)

(4.9) und (4.10) ergeben sich aus der Wohldefiniertheit der P^k_i, genauer aus der Forderung, daß man stets zum gleichen orthogonalen Polynom gelangt, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge man mit x und y "hochmultipliziert":

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (wir setzen $D_0 = \Delta_0 = 0$):

$$0 = P^{k+1}_{1..k} - P^{k+1}_{1..k} =$$

$$= xP^k_{1..k} - T^L_k C_k P^k_* - T^L_k D_k P^{k-1}_* -$$

$$- yP^k_{0..k-1} + T^R_k\Gamma_k P^k_* + T^R_k\Delta_k P^{k-1}_* =$$

$$= (C_{k-1}T^L_k - \Gamma_{k-1}T^R_k - T^L_k C_k + T^R_k\Gamma_k)P^k_* +$$

$$+ (C_{k-1}\Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1}C_{k-1} + D_{k-1}T^L_{k-1} - \Delta_{k-1}T^R_{k-1} -$$
$$- T^L_k D_k + T^R_k \Delta_k) P^{k-1}_*$$

Bezeichnet man mit Ω die Menge aller Quadrupel (D, Δ, C, Γ) von Matrizenfolgen $D := (D_k)_{\mathbb{N}}$, $\Delta := (\Delta_k)_{\mathbb{N}}$, $C := (C_k)_{\mathbb{N}_o}$, $\Gamma := (\Gamma_k)_{\mathbb{N}_o}$, wobei die D_k, Δ_k in $\mathbb{R}^{k+1 \times k}$, C_k, Γ_k in $\mathbb{R}^{k+1 \times k+1}$ liegen und den Bedingungen (4.6) bis (4.10) genügen, und mit $\tilde{\Lambda}^{++}$ die Menge aller $I \in \Lambda^{++}$ mit $I(1) = 1$, dann folgt aus dem bisher Gezeigten, daß

$$F^*: \tilde{\Lambda}^{++} \longrightarrow \Omega$$
$$L \longmapsto (D^{(L)}, \Delta^{(L)}, C^{(L)}, \Gamma^{(L)})$$

wohldefiniert ist.

Die gewünschte Charakterisierung kann man jetzt wie folgt formulieren:

Satz 4.3:

Die Abbildung

$$F^*: \tilde{\Lambda}^{++} \longrightarrow \Omega$$

ist bijektiv.

Beweis:

Sei $(\hat{D}, \hat{\Delta}, \hat{C}, \hat{\Gamma}) = ((\hat{D}_k)_{\mathbb{N}}, (\hat{\Delta}_k)_{\mathbb{N}}, (\hat{C}_k)_{\mathbb{N}_o}, (\hat{\Gamma}_k)_{\mathbb{N}_o}) \in \Omega$ gegeben.

Die Gleichungen (4.7) bis (4.10) für $(\hat{D}, \hat{\Delta}, \hat{C}, \hat{\Gamma})$ garantieren, daß über Beziehungen vom Typ (4.2) eine eindeutig bestimmte Basis $((\hat{P}^k_i)_{0 \le i \le k})_{k \in \mathbb{N}_o}$ von $\mathbb{P}$ bestimmt wird, wobei $\hat{P}^0_0 := 1$ ist.

Durch

(4.11) $$\hat{I}(1) := 1, \quad \hat{I}(\hat{P}^k_i) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \le i \le k,$$

wird ein lineares Funktional $\hat{I}$ auf $\mathbb{P}$ eindeutig bestimmt.

Induktion nach k ergibt:

(4.12) $$\forall\, k \in \mathbb{N}_o \;\forall\, m > k \;\forall\, 0 \le i \le k \;\forall\, 0 \le j \le m: \hat{I}(\hat{P}^k_i \hat{P}^m_j) = 0,$$

denn:

Für $k = 0$ folgt (4.12) aus (4.11).

Ist $k > 0$, $0 \leq i \leq k-1$ und $0 \leq j \leq m$, dann gilt:

$$\hat{I}(\hat{P}_i^k \hat{P}_j^m) = \hat{I}(\hat{P}_i^{k-1} x \hat{P}_j^m) = 0$$

und ganz entsprechend

$$\hat{I}(\hat{P}_k^k \hat{P}_j^m) = \hat{I}(\hat{P}_{k-1}^{k-1} y \hat{P}_j^m) = 0.$$

Definiert man für $k \in \mathbb{N}_0$ die $k+1 x k+1$-Matrix

$$\hat{M}_k := (\hat{I}(\hat{P}_i^k \hat{P}_j^k))_{0 \leq i,j \leq k},$$

dann folgt mit Hilfe von (4.12) wie bei der Herleitung von (4.4):

$$\hat{M}_k T_k^U = \hat{D}_k \hat{M}_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\hat{M}_k T_k^O = \hat{\Delta}_k \hat{M}_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Entsprechend dem Beweis von Lemma 4.1 zeigt man jetzt

$$\hat{M}_k = \sum_{j=0}^{k} \left(\prod_{i=0}^{k-1-j} \hat{D}_{k-i} \prod_{i=0}^{j-1} \hat{\Delta}_{j-i} \right) (e_{j+1}^{(k+1)})^T$$

und somit ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ $\hat{M}_k$ positiv definit. Daraus folgt für ein beliebiges, vom Nullpolynom verschiedenes Polynom

$$P = \sum_{k=0}^{s} \sum_{i=0}^{k} a_{ki} \hat{P}_i^k \in \mathbb{P}:$$

$$\hat{I}(P^2) = \sum_{k=0}^{s} \hat{I}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} a_{ki} \hat{P}_i^k \right)^2 \right) > 0.$$

Folglich gilt $\hat{I} \in \hat{\mathcal{I}}^{++}$, und $((\hat{P}_i^k)_{0 \leq i \leq k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist das System der bezüglich $\hat{I}$ orthogonalen Polynome.

Also ist $F^*(\hat{I}) = (\hat{D}, \hat{\Delta}, \hat{C}, \hat{\Gamma})$, d.h. F^* ist surjektiv und damit auch bijektiv. //

Wir sind insbesondere im Zusammenhang mit dem Nachweis der Existenz von Funktionalen $I \in \Lambda^{++}$ mit bestimmten Eigenschaften an einer Satz 4.3 vergleichbaren Charakterisierung von

$$\bar{\Lambda}_m^{++} := \{I \in \Lambda_m^{++} / \; I(1) = 1\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

interessiert.

Wir definieren für $t \in \mathbb{N}$ die Menge Ω_t aller Quadrupel (D,Δ,C,Γ) von endlichen Matrizenfolgen $D := (D_i)_{1 \leq i \leq t}$, $\Delta := (\Delta_i)_{1 \leq i \leq t}$, $C := (C_i)_{0 \leq i \leq t}$, $\Gamma := (\Gamma_i)_{0 \leq i \leq t}$, D_i, $\Delta_i \in \mathbb{R}^{i+1 \times i}$, C_i, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{i+1 \times i+1}$, die den Bedingungen (4.6) bis (4.10) für alle zugelassenen Indizes genügen.

Für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und für jedes $I \in \bar{\Lambda}_{2k-1}^{++}$ sind die bezüglich I orthogonalen Polynome $((P_j^i)_{0 \leq j \leq i})_{0 \leq i \leq k}$, die zugehörigen Matrizen M_i, X_i, Y_i, C_i, Γ_i, D_i, Δ_i, $i \leq k-1$, und die Abbildung

$$F_k^*: \bar{\Lambda}_{2k-1}^{++} \longrightarrow \Omega_{k-1}$$

$$I \longmapsto (D,\Delta,C,\Gamma)$$

wohldefiniert.

Satz 4.4:

Für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ist die Abbildung

$$F_k^*: \bar{\Lambda}_{2k-1}^{++} \longrightarrow \Omega_{k-1}$$

bijektiv.

Beweis:

Ist $(D,\Delta,C,\Gamma) \in \Omega_{k-1}$ gegeben, dann wird mit $P_0^0 := 1$ über Gleichungen vom Typ (4.2) eine Basis $((P_i^j)_{0 \leq i \leq j})_{0 \leq j \leq k}$ von $\mathbb{P}_k$ wohldefiniert. Wir ergänzen diese mit

$$\{x^l P_i^k / \; 0 \leq i \leq k-1, \; 1 \leq l \leq k-1\} \cup \{x^{l-i} y^i P_k^k / \; 0 \leq i \leq l, \; 1 \leq l \leq k-1\}$$

zu einer Basis B von $\mathbb{P}_{2k-1}$. Durch

$$I(1) := 1,\ I(P) := 0 \text{ für alle } P \in B\setminus\{1\}$$

wird ein Funktional $I \in \Lambda_{2k-1}$ wohldefiniert. Es gilt

$$\forall\ 1 \le j \le k\ \forall\ 0 \le i \le j\ \forall\ 0 \le m \le j-1\ \forall\ 0 \le h \le m:$$

$$I(x^{m-h}y^h p_i^j) = 0, \tag{4.13}$$

denn:

Für k = 1 ist nichts zu zeigen; sei also k > 1. Wegen

$$x^{m-h}y^h p_i^j \in \mathrm{SPAN}(\{x^{t-\mu}y^\mu p_\nu^k /\ 1 \le t \le k-1,\ 0 \le \mu \le t,\ 0 \le \nu \le k\} \cup$$

$$\{p_\nu^l /\ j-m \le l \le k,\ 0 \le \nu \le l\})$$

genügt es, (4.13) für j = k, $0 \le i \le k-1$, $1 \le m \le k-1$ und $1 \le h \le m$ zu zeigen.

Beweis durch Induktion nach m:

Für m = 1 folgt (4.13) aus

$$yp_i^k = xp_{i+1}^k + \sum_{\nu=0}^{k}(\gamma_{i\nu}^k - c_{i+1\nu}^k)p_\nu^k + \sum_{\nu=0}^{k-1}(\delta_{i\nu}^k - d_{i+1\nu}^k)p_\nu^{k-1}.$$

Ist für $1 \le l \le k-2$ (4.13) für alle $m \le l$ gezeigt, dann gilt für alle $0 \le i \le k-1$, $1 \le h \le l+1$:

$$\begin{aligned} I(x^{l+1-h}y^h p_i^k) &= \\ &= I(x^{l+1-h}y^{h-1}(xp_{i+1}^k + \sum_{\nu=0}^{k}(\gamma_{i\nu}^k - c_{i+1\nu}^k)p_\nu^k + \\ &\qquad + \sum_{\nu=0}^{k-1}(\delta_{i\nu}^k - d_{i+1\nu}^k)p_\nu^{k-1})) = \\ &= I(x^{l+2-h}y^{h-1}p_{i+1}^k) = \ldots = I(P) \end{aligned}$$

mit $P \in B\setminus\{p_0^0\}$ und daraus folgt (4.13). Der Rest des Beweises verläuft entsprechend dem Beweis von Satz 4.3 im Anschluß an den Nachweis von (4.12). //

In den folgenden Abschnitten werden wir wiederholt auf die Sätze 4.3 und 4.4 zurückgreifen. Zum Schluß dieses Abschnitts zeigen wir eine weitere wichtige Eigenschaft der Matrizen D_k und Δ_k für ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \Lambda^{++}$. Es kommt uns hier insbesondere auch auf die Beweistechnik an, die wir später in Abschnitt 7 erneut anwenden werden.

Satz 4.5:

Ist $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ zentralsymmetrisch, und ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die $k+1 \times k+1$-Matrix L_k definiert durch $L_k := \Delta_k T_k^R - D_k T_k^L$, dann gilt:

$$\text{Rang}(L_k) = \begin{cases} k, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k+1, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{4.14}$$

Beweis:

(Man beachte $C_i = \Gamma_i = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$!)

Sei $k \geq 3$ und sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^{k+1}$ eine Lösung von $L_k^T x = 0$. Es gilt dann:

$$a^T \Delta_k \neq 0 \neq a^T D_k, \tag{4.15}$$

da sonst wegen (4.6) und Lemma 4.1 $a^T M_k = 0$ wäre, im Widerspruch zu $\det(M_k) \neq 0$. Somit existiert $c^T := (c_1,..,c_{k-1}) \neq 0$, so daß

$$\begin{aligned} a^T \Delta_k &= (0,c_1,..,c_{k-1}) = c^T T_{k-1}^L \text{ und} \\ a^T D_k &= (c_1,..,c_{k-1},0) = c^T T_{k-1}^R \text{ gilt,} \end{aligned} \tag{4.16}$$

woraus

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(4.7)}{=} a^T (D_k \Delta_{k-1} - \Delta_k D_{k-1}) = \\ &\overset{(4.16)}{=} c^T (T_{k-1}^R \Delta_{k-1} - T_{k-1}^L D_{k-1}) = \\ &\overset{(4.10)}{=} c^T L_{k-2} \end{aligned}$$

folgt.

Für ein ungerades k würde somit eine nichttriviale Lösung von

$$[\Delta_1, -D_1]^T x = 0$$

im Widerspruch zu $\det([\Delta_1, D_1]) > 0$ existieren.

Für ein gerades k erhält man eine nicht triviale Lösung a* von $L_2^T x = 0$. Würden zwei linear unabhängige Lösungen a_1, a_2 von $L_k^T x = 0$ existieren, dann wären wegen (4.15) auch $a_1^T D_k$ und $a_2^T D_k$ linear unabhängig. Folglich kann der Kern von L_k^T wegen $a^* \Delta_2 = (0,c)$ höchstens eindimensional sein. Da die k+1xk+1-Matrix

$$M^* := (T^R_{k+1} \Delta_{k+1} - T^L_{k+1} D_{k+1}) M_k$$

wegen (4.4) schiefsymmetrisch ist und somit ihr Rang stets gerade ist, so folgt für ein gerades k:

$$\text{Rang}(L_k) = \text{Rang}(M^*) = k. \qquad //$$

5. ÜBER KUBATURFORMELN MIT MINIMALER KNOTENANZAHL

Kubaturformeln vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten:

Wir haben in Abschnitt 2.2 gesehen, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Funktional $I \in \Lambda^{++}$ existiert, welches eine Kubaturformel vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten besitzt. Wir geben jetzt eine im wesentlichen auf Mysovskikh[30] zurückgehende Charakterisierung dieser Funktionale an (vgl. auch Schmid[34]).

Satz 5.1:

Für ein Funktional $I \in \Lambda^{++}$ und für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine Kubaturformel Φ zum Funktional I vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten.

(ii) Die bezüglich I orthogonalen Polynome P_i^k, $0 \leq i \leq k$ haben dim $\mathbb{P}_{k-1}$ paarweise verschiedene, gemeinsame reelle Nullstellen.

(iii) Es gilt: $\forall\ 1 \leq i,j \leq k$: $M^k_{i-1,j} = M^k_{ij-1}$.

(iv) Es gilt: $T^R_k \Delta_k = T^L_k D_k$.

(v) Es gilt: $\Gamma_{k-1} C_{k-1} - C_{k-1}\Gamma_{k-1} = D_{k-1} T^L_{k-1} - \Delta_{k-1} T^R_{k-1}$.

Beweis:

(v) $\Longrightarrow$ (i): Es gilt (vgl. Abschnitt 4.2):

$$xP^k_{1..k} - yP^k_{0..k-1} = (C_{k-1}T^L_k - \Gamma_{k-1}T^R_k)P^k_* +$$

$$+ (C_{k-1}\Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1}C_{k-1} + D_{k-1}T^L_{k-1} - \Delta_{k-1}T^R_{k-1})P^{k-1}_*$$

Aus (v) und aus Korollar 3.2 folgt, daß $P^k_0,\ldots,P^k_k$ eine H-Basis des von diesen Polynomen erzeugten Ideals A ist. Somit gilt:

(5.1) $\qquad \forall\, P \in A \cap \mathbb{P}_{2k-1}\colon\ I(P) = 0$

Ist Θ die zur Zerlegung $P = U \oplus A$ mit $U := \mathbb{P}_{k-1}$ gehörende Bilinearform aus Satz 2.1, dann gilt für alle $Q \in \mathbb{P}$

$$\Theta(Q,Q) = I(\Pi_U(Q^2)) = I(\Pi_U((Q_U + Q_A)^2)) = I(\Pi_U(Q_U^2)) \overset{(5.1)}{=} I(Q_U^2) \geq 0.$$

Aus Satz 2.1 erhalten wir wegen (2.3) und Lemma 1.2-(ii)-(b) die Aussage (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ist A_Φ das zu Φ gehörende Ideal, dann folgt wegen $A_\Phi \cap \mathbb{P}_{k-1} = \{0\}$ aus Lemma 1.2-(ii)-(b) und aus der (2k-1)-Orthogonalität jedes Polynoms $P \in A_\Phi$:

$$A_\Phi \cap \mathbb{P}_k = \mathrm{SPAN}(\{P_i^k /\ 0 \leq i \leq k\}).$$

Unter Verwendung von Korollar 3.2 schließen wir, daß $P_0^k,\ldots,P_k^k$ eine H-Basis von A_Φ ist und Lemma 1.1-(i) ergibt dann (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Mit Hilfe von Lemma 1.2-(ii)-(b) erhalten wir

$$\forall\ 1 \leq i \leq k\colon\ xP_i^k - yP_{i-1}^k \in \mathrm{SPAN}(\{P_i^k /\ 0 \leq i \leq k\})$$

und folglich gilt:

$$\forall\ 1 \leq i,j \leq k\colon\ 0 = I(P_{j-1}^{k-1}(xP_i^k - yP_{i-1}^k)) = M_{i,j-1}^k - M_{i-1,j}^k.$$

Aus (iii) folgt (iv) mit Hilfe von (4.4):

$$0 = T_k^L M_k T_k^U - T_k^R M_k T_k^0 = (T_k^L D_k - T_k^R \Delta_k) M_{k-1}.$$

(iv) und (v) sind wegen (4.10) äquivalent. //

Die Knoten der Kubaturformel Φ in (i) sind natürlich die gemeinsamen reellen Nullstellen der bezüglich I orthogonalen Polynome $P_0^k,\ldots,P_k^k$. Neu an Satz 5.1 sind lediglich (iv) und (v), wobei (v) sich dann als nützlich erweist, wenn das Funktional I explizit nur auf dem Raum $\mathbb{P}_{2k-1}$ bekannt ist, da (iii) und (iv) eine

Kenntnis von Werten von I außerhalb von $\mathbb{P}_{2k-1}$ voraussetzen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf das Beispiel unten.

Wir zeigen jetzt, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ S_{x-y}-invariante Funktionale existieren, die S_{x-y}-invariante Kubaturformeln vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten besitzen.
Zu diesem Zweck wählen wir für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ k paarweise verschiedene Geraden $G_0,..,G_{k-1}$, die parallel zur Geraden x+y = 0 sind und für jedes $0 \leq i \leq k-1$ wählen wir auf G_i i+1 Punkte y_{ij}, $0 \leq j \leq i$, die symmetrisch zur Geraden x-y = 0 liegen. Die so erhaltene Menge, bestehend aus r := dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Punkten, genügt dem in 1.1 dargestellten Konstruktionsprinzip der Punktmengen $Y_{n,k}$. Folglich liegt die Einschränkung von

$$\Phi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} P(y_{ij})$$

auf $\mathbb{P}_{2k-1}$, wie in 2.2 gezeigt wurde, in Λ^+_{2k-1} und sie ist offenbar S_{x-y}-invariant. Ist $I^* \in \Lambda^+$ eine Fortsetzung von $\Phi_{|\mathbb{P}_{2k-1}}$, dann ist $I \in \Lambda^+$, definiert durch $I(P) := (I^*(P) + I^*(P \circ S_{x-y}))/2$, S_{x-y}-invariant und Φ ist eine Kubaturformel vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten. Man kann insbesondere als Knoten die Punkte $y_{ij} := (i+1-j,j+1)$, $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq i$, wählen.

Beispiel:

$$k = 4,\ \Phi(P) := \Big(\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} P((i+1-j,j+1))\Big)/10,\ \Phi^* := \Phi_{|\mathbb{P}_7}$$

Die bezüglich einer beliebigen Fortsetzung $I^* \in \Lambda^{++}$ von Φ^* orthogonalen Polynome und die zugehörigen Daten sind bis zum Grad 4

eindeutig durch Φ bestimmt:

P_i^k: $P_0^1 = x-2$; $P_0^2 = x^2 - \frac{23}{5}x + \frac{21}{5}$, $P_1^2 = xy - \frac{7}{5}(x+y) + \frac{21}{10}$;

$P_0^3 = x^3 - \frac{51}{7}x^2 + \frac{110}{7}x - \frac{48}{5}$,

$P_1^3 = x^2y - \frac{8}{7}x^2 - \frac{25}{7}xy + \frac{88}{21}x + \frac{8}{3}y - \frac{16}{5}$;

$P_0^4 = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$,

$P_1^4 = x^3y - x^3 - 6x^2y + 6x^2 + 11xy - 11x - 6y + 6$,

$P_2^4 = x^2y^2 - 3(x^2y + xy^2) + 2(x^2 + y^2) + 9xy - 6(x+y) + 4$.

M_i^k: $M_0^1 = 1$, $M_{01}^1 = -\frac{1}{2}$; $M_0^2 = \frac{21}{25}$, $M_{01}^2 = -\frac{21}{50}$, $M_{02}^2 = \frac{7}{25}$, $M_1^2 = \frac{49}{100}$;

$M_0^3 = \frac{72}{175}$, $M_{01}^3 = -\frac{36}{175}$, $M_{02}^3 = \frac{24}{175}$, $M_{03}^3 = -\frac{18}{175}$, $M_1^3 = \frac{104}{525}$,

$M_{12}^3 = -\frac{86}{525}$.

Matrizen der Rekursionsformeln:

$$C_0 = (2), \quad C_1 = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{94}{35} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{35} & \frac{76}{35} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{35} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} & 0 \\ -\frac{7}{30} & \frac{28}{75} \\ \frac{7}{75} & -\frac{28}{75} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{17}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 1 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} \frac{24}{49} & 0 & 0 \\ -\frac{11}{147} & \frac{50}{147} & 0 \\ \frac{2}{147} & -\frac{32}{147} & \frac{6}{49} \\ 0 & \frac{6}{49} & -\frac{9}{49} \end{pmatrix}.$$

Wir können jetzt für I* die Bedingung (v) aus Satz 5.1 für k = 4 nachprüfen ((iv) und (iii) sind nicht anwendbar). Es gilt:

$$\Gamma_3 C_3 - C_3 \Gamma_3 = D_3 T_3^L - \Delta_3 T_3^R = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 16 & 0 \\ 0 & -16 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel zeigt uns, daß die Eigenschaft eines Funktionals, Kubaturformeln vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten zu besitzen, "lokal" ist in dem Sinne, daß sie nur für ein spezielles k_o gelten kann. So ist in unserem Beispiel die Bedingung (iii) aus Satz 5.1 für k = 3 und für k = 2 verletzt! Es tritt somit die Frage auf, ob es Funktionale gibt, die für jedes $k \in \mathbb{N}$ Kubaturformeln vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten besitzen.

Zur unteren Schranke von Möller für die Knotenanzahl von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 für zentralsymmetrische Funktionale:

Im Gegensatz zum soeben Gezeigten folgt aus Satz 4.5 für $k > 1$ die wohlbekannte Aussage, daß für ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \Lambda^{++}$ keine Kubaturformel vom Grad 2k-1 mit dim $\mathbb{P}_{k-1}$ Knoten existiert. Möller[20] hat für diese Funktionale für die Knotenanzahl r von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 die untere Schranke

(5.2) $$r \geq \dim \mathbb{P}_{k-1} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

gezeigt.

Man kann (5.2) wie folgt einsehen: Sei A das zu einer Formel dieses Typs gehörige Ideal, sei $Q := A \cap \mathbb{P}_k$, $s := \dim(Q)$ und sei $Q_i := \sum_{j=0}^{k} a_{ij} p_j^k$, $1 \leq i \leq s$, eine Basis von Q. Angenommen, es gilt $2s > k+2$, dann existieren in Q $s^* := 2s - (k+2)$ linear unabhän-

gige Polynome $Q_i^* := \sum_{j=0}^{k} a_{ij}^* P_j^k$, $1 \leq i \leq s^*$, mit der Eigenschaft

$$\forall\ 1 \leq i \leq s^*: \Pi_{k+1}(xQ_i^*) \in \mathrm{SPAN}(\{\Pi_{k+1}(yQ_i) / \ 1 \leq i \leq s\}).$$

Auf Grund der Zentralsymmetrie von I haben xQ_i^*, $1 \leq i \leq s^*$ und yQ_i, $1 \leq i \leq s$ keine Terme vom Grad k und somit existieren b_{ij}, so daß folgendes gilt:

$$x \sum_{j=0}^{k} a_{ij}^* P_j^k = y \sum_{j=0}^{k} b_{ij} P_j^k, \quad 1 \leq i \leq s^*. \tag{5.3}$$

Offenbar muß $b_{ik} = a_{i0}^* = 0$ und $b_{ij-1} = a_{ij}^*$, $1 \leq j \leq k$ gelten und aus (4.2) erhalten wir für jedes $1 \leq i \leq s^*$:

$$(a_{i1}^*, \ldots, a_{ik}^*)(T_k^L D_k - T_k^R \Delta_k) = 0.$$

Aus Satz 4.5 folgt daraus in Verbindung mit (4.10) sofort $s^* \leq 1$ und wir erhalten die Abschätzung

$$r = \dim \mathbb{P}_{2k-1} - \dim A \cap \mathbb{P}_{2k-1} \geq \dim \mathbb{P}_k - \dim A \cap \mathbb{P}_k =$$
$$= \dim \mathbb{P}_{k-1} + k+1 - s \geq \dim \mathbb{P}_{k-1} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Der hier vorgestellte Beweis von (5.2) stimmt mit demjenigen von Möller[20] bis einschließlich (5.3) überein. Er hat dann aus (5.3) $s^* \leq 1$ mit Hilfe des Satzes von Frechet-Riesz gefolgert.
Möller[20] hat für Funktionale $I \in \Lambda^+$ ein Verfahren zur Konstruktion von Darstellungen vom Grad 2k-1 mit minimaler Knotenanzahl angegeben. Schmid[35] konnte darauf aufbauend mit Hilfe der Theorie der reellen Ideale einen konstruktiven Zugang zu minimalen Kubaturformeln vom Grad 2k-1 eröffnen.

6. EINE METHODE ZUR KONSTRUKTION VON KUBATURFORMELN VOM GRAD 2K - 1 FÜR BELIEBIGE STRIKT QUADRATPOSITIVE LINEARE FUNKTIONALE

Das hier vorgestellte Verfahren zur konstruktiven Charakterisierung von Kubaturformeln vom Grad 2k - 1 für ein beliebiges Funktional $I \in \Lambda^{++}$ geht von der Grundidee aus, daß das zugehörige Ideal stets zwei, notwendigerweise orthogonale, Polynome P, Q k - ten Grades enthält, die einer leicht nachprüfbaren Bedingung genügen. Diese soll einerseits garantieren, daß P und Q keinen Faktor gemeinsam haben, d.h. (P, Q) enthält ein fundamentales System und andererseits soll sie garantieren, daß P und Q eine H - Basis des Ideals (P, Q) bilden.

Beispiel 1:

$$P := x^3 - xy^2 - \frac{4}{15}x, \quad Q := y^3 - x^2y - \frac{4}{15}y$$

P, Q ist keine H - Basis von (P, Q), denn $yP + xQ = -\frac{8}{15}xy$, aber (P, Q) enthält offenbar ein fundamentales System vom Grad 3.

Beispiel 2:

$$P := x^3 + xy^2 - \frac{14}{15}x, \quad Q := y^3 + x^2y - \frac{14}{15}y.$$

(P, Q) enthält kein fundamentales System irgendeinen Grades, denn P und Q haben den Faktor $x^2 + y^2 - \frac{14}{15}$ gemeinsam. P, Q ist aber eine H - Basis von (P, Q).

Der folgende Satz, eine weitere Folgerung aus Satz 3.1, liefert uns die gewünschte Bedingung.

Satz 6.1:

Für zwei Polynome

$$P = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} x^{i-j} y^{j}, \quad Q = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} b_{ij} x^{i-j} y^{j}$$

in $\mathbb{P}_k$, $k \in \mathbb{N}$, sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(i) Die 2kx2k-Matrix

$$RES(P,Q) := \begin{pmatrix} a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} \cdots a_{kk-1} & a_{kk} & 0 & 0 \ldots 0 \\ b_{k0} & b_{k1} & b_{k2} \cdots b_{kk-1} & b_{kk} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_{k0} & a_{k1} \quad \ldots & a_{kk} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_{k0} & b_{k1} \quad \ldots & b_{kk} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad \ldots & 0 & a_{k0} & a_{k1} \cdots & a_{kk} \\ 0 & 0 \quad \ldots & 0 & b_{k0} & b_{k1} \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

ist nicht singulär.

(ii) Das Ideal (P,Q) enthält ein fundamentales System vom Grad 2k - 1, {P, Q} ist eine H - Basis von (P,Q) und es gilt:

$(P,Q) \cap \mathbb{P}_{2k-1} = S$ mit

$S := SPAN(\{x^h y^l P,\ x^h y^l Q / \ h,l \in \mathbb{N}_0,\ h + 1 < k\})$.

Beweis:

Aus (ii) folgt (i): Ist $R_0, \ldots, R_{2k-1}$ ein fundamentales System vom Grad 2k - 1 in (P,Q), dann existieren für jedes $0 \leq i \leq 2k-1$ $S_{i1}, S_{i2} \in \mathbb{P}_{k-1}$, so daß $R_i = S_{i1}P + S_{i2}Q$ gilt. Die Polynome $R_i^* := \Pi_{2k-1}(R_i)$, $0 \leq i \leq 2k-1$, bilden ebenfalls ein fundamentales System vom Grad 2k-1 und sie sind in SPAN(M) mit

$$M := \{x^{k-1-i} y^i \Pi_k(P),\ x^{k-1-i} y^i \Pi_k(Q) / \ 0 \leq i \leq k-1\}$$

enthalten. Somit sind die Elemente von M linear unabhängig. Die Zeilen von RES(P,Q) sind aber die Koeffizientenvektoren der

Elemente von M bezüglich der Monome vom Grad 2k-1 in der üblichen lexikographischen Ordnung und folglich ist RES(P,Q) nicht singulär.

Aus (i) folgt (ii): Aus der eben angegebenen Interpretation der Matrix RES(P,Q) folgt die lineare Unabhängigkeit der Elemente der Menge M. Somit ist $R_0,\ldots,R_{2k-1}$, definiert durch

$$R_i := x^{k-1-i}y^iP, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$
$$R_{k+i} := x^{k-1-i}y^iQ, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

ein fundamentales System vom Grad 2k-1.

$$\mathrm{SPAN}(\{xR_i,\ yR_i/\ 0 \leq i \leq 2k-1\}) \cap \mathbb{P}_{2k-1}$$

ist höchstens eindimensional und wird vom Polynom

$$\begin{aligned} R^* &= P\Pi_kQ - Q\Pi_kP = \\ &= Q(P - \Pi_kP) - P(Q - \Pi_kQ) = \\ &= Q\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} a_{ij}x^{i-j}y^j - P\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} b_{ij}x^{i-j}y^j \end{aligned}$$

erzeugt.

Da R* in S liegt, so folgt aus Satz 3.1, daß $(P,Q) \cap \mathbb{P}_{2k-1} = S$ ist und, daß {P, Q} eine H-Basis von (P,Q) ist. //

Ist (ii) in Satz 6.1 erfüllt, dann überlegt man sich leicht, daß jedes algebraische Komplement $U \subset \mathbb{P}_{2k-1}$ von (P,Q) die Dimension k^2 hat. Satz 2.1 legt jetzt folgende Methode zur Konstruktion von Kubaturformeln vom Grad 2k-1 für ein beliebiges Funktional $I \in \Lambda^{++}$ nahe:

Konstruktionsverfahren 6.2:

(i) Man startet mit zwei bezüglich I orthogonalen Polynomen $P = a^T p^k_*$, $Q = b^T p^k_*$, die so bestimmt sind, daß RES(P,Q) nicht singulär ist.

(ii) Man bestimmt eine Basis $U_1,..,U_d$, $d := k^2$, eines algebraischen Komplements $U \subset \mathbb{P}_{2k-2}$ von $(P,Q) \cap \mathbb{P}_{2k-1}$ und berechnet die symmetrische Matrix

$$\Theta^* := (\Theta(U_i,U_j))_{1 \le i,j \le d},$$

wobei Θ die zur Zerlegung $U \oplus (P,Q)$ gehörende Bilinearform aus Satz 2.1 ist. Ist Θ^* positiv semidefinit, ——> (iii), ansonsten existiert keine Kubaturformel zum Funktional I vom Grad 2k-1, deren zugehöriges Ideal die zwei Polynome P und Q enthält.

(iii) Sind $k_1,..,k_r$ die paarweise verschiedenen, reellen, gemeinsamen Nullstellen von P und Q und ist $(c_1,...,c_r)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\sum_{j=1}^{r} c_j U_i(k_j) = I(U_i), \qquad 1 \le i \le d,$$

dann ist

$$\Phi: P \longmapsto \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq 0}}^{r} c_i P(k_i)$$

eine Kubaturformel zum Funktional I vom Grad 2k-1 mit höchstens k^2 Knoten.

Bevor wir Beispiele zu diesem Verfahren angeben, wollen wir sehen, wie es sich in das bisherige Wissen zum Kubaturproblem einreiht. 1969 hat Stroud[40, Theorem 2] eine Methode zur Konstruktion von Darstellungen Φ vom Grad 2k-1 für Funktionale $I \in \Lambda^+$ angegeben,

die ebenfalls von der Grundidee ausgeht, als Knoten von Φ die gemeinsamen reellen Nullstellen zweier bezüglich I orthogonaler Polynome P und Q vom Grad k zu nehmen. Diese Methode setzt voraus, daß P und Q genau k^2 paarweise verschiedene Nullstellen besitzen. Der bekannte Satz von Max Noether garantiert dann, daß jedes Polynom in $\mathbb{P}$, welches in den gemeinsamen Nullstellen von P und Q verschwindet, bereits zu (P,Q) gehört, und daß {P,Q} eine H-Basis von (P,Q) ist. Dieser Ansatz wurde von Mysovskikh[27] und von Möller[19] auf den n-dimensionalen Fall übertragen. Natürlich kann bei diesem Ansatz nicht von vornherein garantiert werden, daß die Koeffizienten von Φ positiv sind, und zudem müssen zuerst die Nullstellen von P und Q berechnet werden und dann kann entschieden werden, ob P und Q überhaupt brauchbar sind. Weiterhin wird von diesem Verfahren die sehr wichtige Situation, daß P und Q mehrfache Nullstellen haben, nicht erfaßt. Genau dieser Fall tritt aber häufig bei minimalen Kubaturformeln auf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Die Knoten der minimalen Kubaturformel von Tyler (Formel C_2:7-1 in Stroud[41]) vom Grad 7 für das Funktional I_{PL} sind genau die 12 gemeinsamen Nullstellen von

$$P = P_0^4 + \frac{27}{55}P_2^4, \qquad Q = P_4^4 + \frac{27}{55}P_2^4,$$

wobei vier dieser Nullstellen mehrfach sind. RES(P,Q) ist nicht singulär, und folglich ist unsere Methode auch hier anwendbar. Von verschiedenen Autoren wurde versucht, das Problem der mehrfachen Nullstellen anzugehen; so haben Mysovskikh[25], Günther [7] und Möller[19] vorgeschlagen, auch Werte von Ableitungen der darzustellenden Funktion in der Kubaturformel zuzulassen.

Franke[3] hat in seiner Dissertation versucht, dieses Problem mit Hilfe eines Grenzüberganges, aus der Situation im Ansatz von Stroud heraus, in den Griff zu bekommen. Er konnte aber nur für Spezialfälle eine Lösung formulieren.

Wir geben jetzt zwei Beispiele zu dem Verfahren 6.2 an. Als erstes leiten wir ein zentrales Ergebnis der Dissertation von Günther her, veröffentlicht in der Arbeit Günther[8].

Satz 6.3:

Die Menge aller Kubaturformeln vom Grad 3 mit minimaler Knotenanzahl für ein Funktional $I \in \Lambda^{++}$ kann man wie folgt beschreiben:

(i) Ist $M_{11}^2 > M_{02}^2$ (bzw. $M_{11}^2 < M_{02}^2$), dann gilt:

(a) Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $ab < 1$ (bzw. $ab > 1$) existiert eine interpolatorische Kubaturformel, deren Knoten die vier paarweise verschiedenen, gemeinsamen, reellen Nullstellen von $P_0^2 + aP_1^2$ und $P_2^2 + bP_1^2$ sind.

(b) Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$(bzw. $c < 0$) existiert eine interpolatorische Kubaturformel, deren Knoten die vier paarweise verschiedenen, gemeinsamen, reellen Nullstellen von $P_0^2 + cP_2^2$ und P_1^2 sind.

(ii) Ist $M_{11}^2 = M_{02}^2$, dann gilt:

Es existiert eine Kubaturformel, deren Knoten die drei paarweise verschiedenen, gemeinsamen, reellen Nullstellen von P_0^2, P_1^2, P_2^2 sind.

Beweis:

Seien $P = (a_0,a_1,a_2)P_*^2$ und $Q = (b_0,b_1,b_2)P_*^2$ gegeben.

Fallunterscheidung:

(i) RES(P,Q) ist nicht singulär:

Es gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten für P und Q:

(a) $P = P_0^2 + aP_1^2$, $Q = bP_1^2 + P_2^2$ mit $ab \neq 1$,

(b) $P = P_0^2 + cP_2^2$, $Q = P_1^2$ mit $c \neq 0$.

(ii) RES(P,Q) ist singulär:

Es gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten für P und Q:

(a) $P = P_0^2 + aP_1^2$, $Q = P_2^2 + P_1^2/a$ mit $a \neq 0$,

(b) $P = P_0^2$, $Q = P_1^2$.

Im Fall (i) wenden wir das Verfahren 6.2 an:

Fall (a): $1, P_0^1, P_1^1, P_1^2$ ist eine Basis eines Komplements von (P,Q). Die zugehörige Matrix Θ^* hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} M_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0^1 & M_{01}^1 & 0 \\ 0 & M_{10}^1 & M_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta(P_1^2,P_1^2) \end{pmatrix}$$

Es gilt: $R_1 := P_1^2P_1^2 + (bxyP - x^2Q)/(1 - ab) \in \mathbb{P}_3$,

und

$$\Theta(P_1^2,P_1^2) = I(R_1) =$$

$$= I(P_1^2P_1^2 + (bP_1^2P_0^2 + abP_1^2P_1^2 - bP_0^2P_1^2 - P_0^2P_2^2)/(1 - ab)) =$$

$$= (M_1^2 - M_{02}^2)/(1 - ab).$$

Daraus folgt die Existenz der Kubaturformeln vom Typ (i)-(a).

Fall (b): $1, P_0^1, P_1^1, P_2^2$ ist eine Basis eines Komplements von (P,Q). Die zugehörige Matrix Θ^* unterscheidet sich von derjenigen in (a) dadurch, daß rechts unten $\Theta(P_2^2,P_2^2)$ steht. Es gilt:

$$R_2 := P_2^2P_2^2 + (xyQ - y^2P)/c \in \mathbb{P}_3$$

und

$$\Theta(P_2^2,P_2^2) = I(R_2) =$$

$$= I(P_2^2P_2^2 + (P_1^2P_1^2 - P_0^2P_2^2 - cP_2^2P_2^2)/c) = (M_1^2 - M_{02}^2)/c.$$

Daraus folgt die Existenz der Kubaturformeln vom Typ (i)-(b).
Im Fall (ii)-(a) existiert nur dann eine Kubaturformel, wenn das in $\mathbb{P}_2$ liegende Polynom $R_3 := yP - axQ$ orthogonal ist, daß heißt unter anderem:

$$0 \stackrel{!}{=} I(xR_3) = I(xyP_0^2 + axyP_1^2 - x^2P_1^2 - ax^2P_2^2) = a(M_1^2 - M_{02}^2).$$

Entsprechendes Vorgehen im Fall (b) liefert für $R_4 := yP - xQ$:

$$0 \stackrel{!}{=} I(yR_4) = I(y^2P_0^2 - xyP_1^2) = M_{02}^2 - M_1^2.$$

Der Beweis dieses Satzes ist vollständig, wenn man beachtet, daß für das zu einer Kubaturformel zum Funktional I mit höchstens 4 Knoten gehörende Ideal A $\dim(A \cap \mathbb{P}_2) \geq 2$ gelten muß und daher einer der beiden Fälle (i) und (ii) eintreten muß. //

Als zweites Beispiel wollen wir die Menge $KF_{I,D4}^{5,9}$ aller D4-invarianten Kubaturformeln vom Grad 5 mit maximal 9 Knoten für ein beliebiges D4-invariantes Funktional $I \in \mathbb{I}^{++}$ beschreiben.
Aus Satz 4.4 folgt in Verbindung mit Bemerkung 4.2, daß jedes Funktional $I \in (\mathbb{I}_5^{++})_{D4}$ eindeutig durch die Koeffizienten $d_0^1 := d_{00}^1$, $d_0^2 := d_{00}^2$, $d_1^2 := d_{11}^2$, d_{20}^2 in den Rekursionsformeln (4.1) bestimmt ist. Sie genügen den Bedingungen

$$d_0^1 > 0,\ d_0^2 > 0,\ d_1^2 > 0,\ |d_{20}^2| < d_0^2,\ d_1^2 - d_{20}^2 = d_0^1,$$

wie man leicht mit Hilfe von (4.6) und (4.10) nachprüft. Definiert man

$$(\Omega_2)_{D4} := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ |c-a| < b\},$$

dann gilt folglich: Die Abbildung

$$(F_2^*)_{D4}: (\bar{\Lambda}_5^{++})_{D4} \longrightarrow (\Omega_2)_{D4}$$
$$I \longmapsto (d_0^1, d_0^2, d_1^2)$$

ist bijektiv.

Wir führen noch die Mengen

$$\Psi_1 := \{I \in (\bar{\Lambda}_5^{++})_{D4} / \; d_1^2 < d_0^1,\; d_0^2 - d_1^2 < d_0^1\},$$
$$\Psi_2 := \{\quad " \quad / \; d_1^2 \geq d_0^1,\; d_0^2 - d_1^2 \geq d_0^1\},$$
$$\Psi_3 := \{\quad " \quad / \; d_1^2 \geq d_0^1,\; d_0^2 - d_1^2 < d_0^1\},$$
$$\Psi_4 := \{\quad " \quad / \; d_1^2 < d_0^1,\; d_0^2 - d_1^2 \geq d_0^1\},$$

ein und erhalten so eine disjunkte Zerlegung $\bigcup_{i=1}^{4} \Psi_i$ von $(\bar{\Lambda}_5^{++})_{D4}$ in nicht leere Teilmengen.

Satz 6.4:

Die Menge $KF_{I,D4}^{5,9}$ aller D4-invarianten Kubaturformeln vom Grad 5 mit maximal 9 Knoten für ein Funktional $I \in (\bar{\Lambda}^{++})_{D4}$ enthält genau folgende Formeln:

(i) Eine Formel Φ mit 9 Knoten:

$$\Phi: P \longmapsto c_1 P(0,0) +$$
$$+ c_2(P(u,v) + P(u,-v) + P(-u,v) + P(-u,-v) +$$
$$+ P(v,u) + P(v,-u) + P(-v,u) + P(-v,-u)),$$

wobei

$c_1 = (d_0^2+d_1^2-d_0^1)/a$, $c_2 = d_0^1/4a$, $u = \sqrt{(a+s)/2}$, $v = \sqrt{(a-s)/2}$

ist, mit

$s := \sqrt{a^2-2ad_1^2}$ und $a := d_0^2+d_1^2+d_0^1$.

A_Φ wird von den Polynomen $P_0^3 + P_2^3$, $P_3^3 + P_1^3$, $x^2y^2 - d_1^2(x^2 + y^2)/2$ erzeugt.

(ii) Eine einparametrige Familie von Formeln Φ_λ mit 9 Knoten:

$$\Phi_\lambda : P \longmapsto c_1 P(0,0) +$$
$$+ c_2(P(u,0) + P(-u,0) + P(0,-u) + P(0,u)) +$$
$$+ c_3(P(v,v) + P(-v,v) + P(v,-v) + P(-v,-v)),$$

wobei

$u = \sqrt{d_0^2 + d_0^1 + \lambda d_1^2}$, $v = u/\sqrt{1+\lambda}$,

$c_2 = d_0^1(1-d_1^2/v^2)/2u^2$, $c_3 = d_1^2 d_0^1/4v^4$, $c_1 = 1-4(c_2+c_3)$ ist und der zulässige Bereich für λ aus der Tabelle unten zu ersehen ist.

A_{Φ_λ}, $\lambda \neq 1$, wird von den Polynomen $P_0^3 + \lambda P_2^3$, $P_3^3 + \lambda P_1^3$ erzeugt.

(iii) Formeln Φ_λ mit 8 Knoten, die dem Typ (ii) gleichen, mit der Ausnahme, daß $c_1 = 0$ ist. Die Werte für λ sind aus der Tabelle unten zu ersehen.

A_{Φ_λ} wird von den Polynomen $P_0^3 + \lambda P_2^3$, $P_3^3 + \lambda P_1^3$, $x^2y^2 - \mu_1(x^2+y^2) - \mu_2$ erzeugt, wobei

$\mu_1 = d_1^2/(1-\lambda) + (d_0^2 - d_{20}^2)/(1-\lambda^2)$, $\mu_2 = \mu_1(d_0^2 + d_0^1 + \lambda d_1^2)$ ist.

Tabelle der zulässigen λ-Werte:

	Typ (ii):	Typ (iii):
$I_{\mid \mathbb{P}_5} \in \Psi_1$	$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$	$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$
$I_{\mid \mathbb{P}_5} \in \Psi_2$	$\lambda \in (-1, \infty)$	–
$I_{\mid \mathbb{P}_5} \in \Psi_3$	$\lambda \in (\lambda_1, \infty)$	$\lambda = \lambda_1$
$I_{\mid \mathbb{P}_5} \in \Psi_4$	$\lambda \in (-1, \lambda_2)$	$\lambda = \lambda_2$

Die Werte λ_1, λ_2 sind dabei wie folgt definiert:

$$\lambda_1 = \begin{cases} (-d_0^2 + w)/d_{20}^2, & \text{falls } d_{20}^2 \neq 0, \\ -d_0^2/2d_1^2, & \text{falls } d_{20}^2 = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -(d_0^2 + w)/d_{20}^2, \quad \text{falls } d_{20}^2 \neq 0,$$

$$w := \sqrt{(d_0^2 + d_{20}^2)(d_0^2 - d_{20}^2)(1 - d_{20}^2/d_1^2)}.$$

Beweis:

Aus elementaren Symmetrieüberlegungen unter Verwendung von Bemerkung 4.2 folgt für das zu einer Formel $\Phi \in KF^{5,9}_{I,D4}$ gehörige Ideal A_Φ die Existenz von eindeutig bestimmten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0$, so daß $A_\Phi \cap \mathbb{P}_3 = SPAN(P,Q)$ ist, mit $P = \alpha_1 P_0^3 + \alpha_2 P_2^3$, $Q(x,y) = P(y,x)$.

Wir unterscheiden vier verschiedene Möglichkeiten:

(a) $P = P_0^3 + \lambda P_2^3$, $|\lambda| \neq 1$,

(b) $P = P_0^3 + P_2^3$,

(c) $P = P_0^3 - P_2^3$,

(d) $P = P_2^3$.

Die Fälle (c) und (d) können nicht auftreten, denn:

$$y(P_0^3 - P_2^3) + x(P_3^3 - P_1^3) = -2(d_0^2 - d_{20}^2)xy \neq 0,$$

$$yP_1^3 - xP_2^3 = d_1^2(x^2 - y^2) \neq 0.$$

Fall (a): RES(P,Q) ist nicht singulär und folglich können wir das Verfahren 6.2 anwenden:

$1, P_0^1, P_1^1, P_0^2, P_1^2, P_2^2, P_1^3, P_2^3, S := x^2y^2$ ist eine Basis eines Komplements U von (P,Q). Die zur Zerlegung $U \oplus (P,Q)$ gehörige Matrix Θ^* hat, unter Berücksichtigung aller Symmetrien, folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta(1,S) \\
0 & M_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & M_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & M_0^2 & 0 & M_{02}^2 & 0 & 0 & \Theta(P_0^2,S) \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & M_{02}^2 & 0 & M_0^2 & 0 & 0 & \Theta(P_0^2,S) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta(P_1^3,P_1^3) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta(P_1^3,P_1^3) & 0 \\
\Theta(1,S) & 0 & 0 & \Theta(P_0^2,S) & 0 & \Theta(P_0^2,S) & 0 & 0 & \Theta(S,S)
\end{pmatrix}$$

Wir erinnern an die aus Abschnitt 4.1 resultierenden Beziehungen:

$$M_0^2 = d_0^2 d_0^1,\ M_1^2 = d_1^2 d_0^1,\ M_{02}^2 = d_{20}^2 d_0^1.$$

Folglich gilt:

$$\Theta(1,S) = I(S) = M_1^2 = d_1^2 d_0^1.$$

Mit Hilfe der in (P,Q) liegenden Polynome

$$R_1 := (yP - \lambda xQ)/(1 - \lambda^2) = x^3 y - c_\lambda xy, \quad R_2(x,y) := R_1(y,x),$$

$$c_\lambda := d_1^2 + (d_0^2 - d_{20}^2)/(1+\lambda),$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Theta(P_1^3,P_1^3) &= I(P_1^3 P_1^3 - xyR_1) = (d_0^2 - d_{20}^2) d_1^2 d_0^1/(1+\lambda),\\
\Theta(P_0^2,S) &= I((x^2 - d_0^1)x^2y^2 - xyR_1) =\\
&= I((c_\lambda - d_0^1)S) = d_1^2 d_0^1 (c_\lambda - d_0^1).\\
\Theta(S,S) &= I(S^2 - R_1R_2 - c_\lambda xy(R_1 + R_2)) =\\
&= I(c_\lambda^2 S) = d_1^2 d_0^1 c_\lambda^2.
\end{aligned}$$

Θ^* ist offenbar genau dann positiv semidefinit, wenn $\Theta(P_1^3,P_1^3) \geq 0$ ist und, wenn die folgende Matrix Θ_λ^{**} positiv semidefinit ist.

$$\Theta_\lambda^{**} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Theta(1,S) \\ 0 & M_0^2 & M_{02}^2 & \Theta(P_0^2,S) \\ 0 & M_{02}^2 & M_0^2 & \Theta(P_0^2,S) \\ \Theta(1,S) & \Theta(P_0^2,S) & \Theta(P_0^2,S) & \Theta(S,S) \end{pmatrix}$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn $D(\lambda) := \det(\Theta_\lambda^{**}) \geq 0$ gilt, wie man sich mit einem einfachen Stetigkeitsargument überlegt. Es gilt

$$D(\lambda) = a(d_1^2 d_{20}^2 \lambda^2 + 2d_1^2 d_0^2 \lambda + d_1^2 d_{20}^2 + (d_0^2)^2 - (d_{20}^2)^2),$$

wobei a stets positiv ist.

Folglich gehört zu jedem

$$\lambda \in \{x \in \mathbb{R} / \; x > -1,\; D(x) \geq 0,\; x \neq 1\}$$

eine Kubaturformel Φ_λ aus der Klasse $KF^{5,9}_{I,D4}$.

Für $D(\lambda) > 0$ wird das zugehörige Ideal von P und Q erzeugt. Man erhält so alle Formeln vom Typ (ii) mit Ausnahme von Φ_λ für $\lambda = 1$. Die Formeln vom Typ (iii) erhält man, falls $D(\lambda) = 0$ und $\lambda > -1$ ist. Der Koeffizient c_1 verschwindet und im zugehörigen Ideal muß noch ein weiteres Polynom $R^* := x^2y^2 - \mu_1(x^2+y^2) - \mu_2$ liegen; μ_1 und μ_2 bestimmt man aus der Bedingung $xR^* - yR_1 = \text{const}*P$.

Es bleibt uns noch der Fall (b):

Angenommen, es existiert eine zugehörige Formel Φ, dann muß es im zugehörigen Ideal noch ein von xP, yP, xQ, yQ linear unabhängiges Polynom T vom Grad 4 geben. Es gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

$$T_1 = xy(x^2 - y^2),$$

$$T_2 = x^2y^2 + \zeta(x^2 + y^2).$$

Jede bestimmt eine Formel, wie man durch Berechnen der Nullstellen von (P,Q,T_i), $i=1,2$, und der Koeffizienten nachprüft. Die Formel für T_1 schließt die Lücke im Formeltyp (ii) für $\lambda = 1$ und T_2 ergibt den Formeltyp (i). Den Wert von ζ erhalten wir aus der Bedingung $I(T_2) = 0$. //

Für Funktionale vom Typ $\iint_D P(x,y)dxdy$, wobei D ein D4-invariantes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ ist, hat Huelsman[11] einen Teil dieser Formeln bereits angegeben. Die bekannte Formel von Burnside für das Funktional I_{PL} (vgl. Stroud[41], Formel C_2: 5-3) gehört zum Typ (iii).

7. EINE KONSTRUKTIVE CHARAKTERISIERUNG EINER KLASSE VON ZENTRALSYMMETRISCHEN KUBATURFORMELN FÜR BELIEBIGE ZENTRALSYMMETRISCHE STRIKT QUADRATPOSITIVE LINEARE FUNKTIONALE

Ist ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \Lambda^{++}$ gegeben, dann liegt es auf Grund der Überlegungen in Abschnitt 5 nahe, einen Ansatz zur Konstruktion von (zentralsymmetrischen) Kubaturformeln zum Funktional I vom Grad 2k-1 zu versuchen, der von der Grundidee ausgeht, daß im zugehörigen Ideal A ein fundamentales System vom Grad k+1 liegt. Morrow/Patterson[21] haben diesen Weg vorgeschlagen. Schmid[37] konnte mit Hilfe seines Charakterisierungssatzes einen konstruktiven Zugang zu Kubaturformeln dieses Typs angeben, wobei er sich jedoch auf Funktionale mit Produktstruktur beschränken mußte.

Wir sind jetzt in der Lage, für ein beliebiges zentralsymmetrisches Funktional $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ eine konstruktive Charakterisierung der Klasse $KF^{*}_{I,k}$ aller zentralsymmetrischen Kubaturformeln vom Grad 2k-1, deren zugehöriges Ideal ein fundamentales System vom Grad k+1 enthält, anzugeben und wesentliche Eigenschaften dieser Klasse zu beweisen.

Wir benötigen folgende kxk+1-Matrix ($k \in \mathbb{N}$):

$$T^{*}_{k} := \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/2 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1/2 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

T^{*}_{k} unterscheidet sich von T^{R}_{k} dadurch, daß in Zeilen 2,3,..,k an Stelle von 1 die Zahl 1/2 steht.

Satz 7.1:

Sei ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \Lambda^{++}$ und ein $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, gegeben. Wir bezeichnen mit $S^*_{I,k}$ die Menge aller Lösungen $(B_k,\overline{B}_k) \in (\mathbb{R}^{k+1xk})^2$ des Gleichungssystems

$$D_{k-1}T^L_{k-1} - \Delta_{k-1}T^R_{k-1} = T^L_k B_k - T^R_k \overline{B}_k, \tag{7.1}$$

$$\overline{B}_k D_{k-1} = B_k \Delta_{k-1}, \tag{7.2}$$

$$(\overline{B}_k T^R_k - B_k T^L_k) B_k = 0, \tag{7.3}$$

$$(\overline{B}_k T^R_k - B_k T^L_k) \overline{B}_k = 0, \tag{7.4}$$

für die die symmetrische k+1xk+1-Matrix

$$M(B_k,\overline{B}_k) := B_k M_{k-1} T^*_k + \overline{B}_k M_{k-1} T^{*Z}_k \tag{7.5}$$

positiv semidefinit ist. Dann gilt:

(i) Zu jeder Lösung $(B_k,\overline{B}_k) \in S^*_{I,k}$ existiert eine Kubaturformel $\Phi = \Phi(B_k,\overline{B}_k)$ aus der Klasse $KF^*_{I,k}$, die wie folgt eindeutig bestimmt ist:

Sind $k_1,..,k_s$ die gemeinsamen, paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen der über die Gleichungen

$$\begin{aligned} xP^k_* &= R_{0..k} + B_k P^{k-1}_* \\ yP^k_* &= R_{1..k+1} + \overline{B}_k P^{k-1}_* \end{aligned} \tag{7.6}$$

wohldefinierten Polynome $R_0,..,R_{k+1}$ und ist $(c_1,..,c_s)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{s} c_i X_j(k_i) = I(X_j), \quad 1 \leq j \leq d := \dim(\mathbb{P}_k),$$

$(X_1,..,X_d$ sei eine beliebige Basis von $\mathbb{P}_k)$, dann ist Φ gegeben durch

$$\Phi: P \longmapsto \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq 0}}^{s} c_i P(k_i).$$

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} S^*_{I,k} &\longrightarrow KF^*_{I,k} \\ (B_k, \overline{B}_k) &\longmapsto \Phi(B_k, \overline{B}_k) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis:

(Wir bezeichnen im weiteren mit b^k_{ij} bzw. $\overline{b}^k_{ij}$ die Elemente von B_k bzw. von $\overline{B}_k$).

Ist $\Phi \in KF^*_{I,k}$ gegeben, dann liegen im zugehörigen Ideal A_Φ $k+2$ Polynome

$$R_i = P^{k+1}_i + \sum_{j=0}^{k} s_{ij} P^k_j + \sum_{j=0}^{k-1} t_{ij} P^{k-1}_j, \qquad 0 \leq i \leq k+1.$$

Man kann auf Grund der Zentralsymmetrie von Φ o.B.d.A. $s_{ij} = 0$, $0 \leq i \leq k+1$, $0 \leq j \leq k$, annehmen. Weiterhin sind wegen $A_\Phi \cap \mathbb{P}_{k-1} = \{0\}$ die t_{ij} eindeutig bestimmt, und daher existieren wegen (4.2) eindeutig bestimmte B_k, $\overline{B}_k \in \mathbb{R}^{k+1 \times k}$, so daß man die R_i in der Form (7.6) schreiben kann.

Wir holen uns als erstes (7.1) entsprechend der Herleitung von (4.10):

$$\begin{aligned} 0 = R_{1..k} - R_{1..k} &= \\ = xP^k_{1..k} - T^L_k B_k P^{k-1}_* - yP^k_{0..k-1} + T^R_k \overline{B}_k P^{k-1}_* &= \\ = (D_{k-1} T^L_{k-1} - \Delta_{k-1} T^R_{k-1} + T^R_k \overline{B}_k - T^L_k B_k) P^{k-1}_* . & \end{aligned}$$

Wie bei der Herleitung von (4.7) zeigt man

$$\begin{aligned} yR_{0..k} - xR_{1..k+1} &= \\ = (\overline{B}_k T^R_k - B_k T^L_k) P^k_* + (\overline{B}_k D_{k-1} - B_k \Delta_{k-1}) P^{k-2}_*, & \end{aligned}$$

woraus (7.2) folgt, da jedes $P \in A_\Phi$ $2k-1$-orthogonal sein muß. Definiert man $N_k := \overline{B}_k T^R_k - B_k T^L_k$, so müssen die Komponenten von $xN_k P^k_*$, $yN_k P^k_*$ in A_Φ liegen. Folglich gilt

$$0 = xN_k P_*^k - N_k R_{0..k} = N_k B_k P_*^{k-1},$$

$$0 = yN_k P_*^k - N_k R_{1..k+1} = N_k \overline{B}_k P_*^{k-1},$$

womit wir (7.3) und (7.4) gezeigt haben. Bezeichnet man mit A_S das von $R_0,..,R_{k+1}$ erzeugte Ideal und mit Θ_S die zu einer Zerlegung $\mathbb{P} = A_S \oplus U_S$ mit $U_S \subset \mathbb{P}_k$ gehörende Bilinearform aus Satz 2.1, dann ist die Matrix

$$M_S := (\Theta_S(P_i^k P_j^k))_{0 \le i,j \le k}$$

positiv semidefinit. Es gilt $M_S = M(B_k, \overline{B}_k)$, denn:
$\forall\ 0 \le i \le k\ \forall\ 0 \le j \le k-1$:

$$\Theta_S(P_i^k P_j^k) = \Theta_S(P_i^k(xP_j^{k-1} - \sum_{l=0}^{k-2} d_{jl}^{k-1} P_l^{k-2})) =$$

$$= \Theta_S((R_i + \sum_{l=0}^{k-1} b_{il}^k P_l^{k-1}) P_j^{k-1} - \sum_{l=0}^{k-2} d_{jl}^{k-1} P_i^k P_l^{k-2}) = \sum_{l=0}^{k-1} b_{il}^k M_{lj}^{k-1};$$

und ganz entsprechend zeigt man
$\forall\ 0 \le i \le k\ \forall\ 1 \le j \le k$:

$$\Theta_S(P_i^k P_j^k) = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{b}_{il}^k M_{lj}^{k-1}.$$

Somit gehört $(B_k, \overline{B}_k)$ zu $S^*_{I,k}$.
Ist umgekehrt $(B_k, \overline{B}_k) \in S^*_{I,k}$ gegeben, dann folgt unter Verwendung der im ersten Beweisteil hergeleiteten Beziehungen aus (7.1), daß $k+2$ Polynome $R_0,..,R_{k+1}$ über (7.6) wohldefiniert werden und aus Korollar 3.3 folgt mit Hilfe von (7.1) bis (7.4), daß die Polynome $R_0,..,R_{k+1}, xR_1 - yR_0, .., xR_{k+1} - yR_k$ eine H-Basis aus $2k-1$-orthogonalen Polynomen des von ihnen erzeugten Ideals A* bilden. Daraus folgt

(7.7) $\qquad \forall\ P \in A^* \cap \mathbb{P}_{2k-1}: I(P) = 0.$

Ist Θ die zu einer Zerlegung $\mathbb{P} = U^* \oplus A^*$ mit $U^* \subset \mathbb{P}_k$ gehörende Bilinearform aus Satz 2.1, dann zeigt man wie oben

$$(\Theta(P_i^k P_j^k))_{0 \le i,j \le k} = M(B_k, \overline{B}_k).$$

Folglich ist Θ positiv semidefinit, da wegen (7.7) für alle $P,Q \in \mathbb{P}$ mit $\mathrm{Grad}(PQ) < 2k$

$$\Theta(PQ) = I(PQ - \Pi_{A^*}(PQ)) = I(PQ)$$

gilt. Aus Satz 2.1 erhalten wir somit die Existenz einer Kubaturformel mit den genannten Eigenschaften. //

Die Matrix (7.5) ist ganz entsprechend den Matrizen M_k aufgebaut. Für $k = 3$ kann man $M(B_3, \overline{B}_3)$ beispielsweise wie folgt schreiben:

$$[B_3 D_2 D_1,\ B_3 D_2 \Delta_1,\ B_3 \Delta_2 \Delta_1,\ \overline{B}_3 \Delta_2 \Delta_1].$$

B_k und $\overline{B}_k$ nehmen also in M_k die Rolle von D_k und Δ_k ein.

Die Stärke des aus dem Satz 7.1 resultierenden Konstruktionsverfahrens besteht unter anderem darin, daß man die Polynome, die im Ideal der zu konstruierenden Kubaturformel liegen, die aber nicht zu $(R_0,\ldots,R_{k+1})$ gehören, nicht kennen muß. Für Funktionale mit Produktstruktur bedeutet das eine erhebliche Vereinfachung gegenüber dem Konstruktionsverfahren 4.3.6 in Schmid[38]. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf die Anmerkung im Anschluß an Korollar 2.3.

Satz 7.2:

Ist für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ und für ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ ein $\Phi = \Phi(B_k, \overline{B}_k) \in KF^*_{I,k}$ gegeben, und ist $R_0,\ldots, R_{k+1}$ das zugehörige fundamentale System aus (7.6), dann gilt

(i) für das zugehörige Ideal A_Φ:

$$A_\Phi \cap \mathbb{P}_k = \{a^T P^k_* /\ a \in \mathbb{R}^{k+1},\ a^T \overline{B}_k = a^T B_k = 0\} =$$

$$= \{a^T P^k_* /\ a \in \mathbb{R}^{k+1},\ M(B_k, \overline{B}_k)a = 0\}.$$

(ii) für die Knotenmenge K_Φ von Φ:

$$NG((R_0,\ldots,R_{k+1})) \subset K_\Phi \subset NG((R_0,\ldots,R_{k+1})) \cup \{(0,0)\},$$

(iii) für die Knotenanzahl r:

$$\dim \mathbb{P}_{k-1} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \leq r \leq \dim \mathbb{P}_{k-1} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

(i) Es gilt: $A_\Phi \cap \mathbb{P}_k \subset SPAN(\{P_i^k / \ 0 \leq i \leq k\})$.
Aus $a^T P_*^k \in A_\Phi$ folgt:

$$0 = xa^T P_*^k - a^T R_{0..k} = a^T B_k P_*^{k-1},$$

$$0 = ya^T P_*^k - a^T R_{1..k+1} = a^T \overline{B}_k P_*^{k-1}.$$

Ist Θ die zu einer Zerlegung $\mathbb{P} = A_\Phi \oplus U$ mit $U \subset \mathbb{P}_k$ gehörende Bilinearform aus Satz 2.1 und ist $a^T P_*^k$ gegeben mit $a^T B_k = a^T \overline{B}_k = 0$, dann gilt

$$xa^T P_*^k, \ ya^T P_*^k \in SPAN(\{R_i / \ 0 \leq i \leq k+1\})$$

und daher ist

$$\Theta(a^T P_*^k, a^T P_*^k) = I(\Pi_U((a^T P_*^k)^2)) = const * I(a^T P_*^k) = 0,$$

und folglich gehört $a^T P_*^k$ zu A_Φ. Der Rest folgt direkt aus (7.5).
(ii) Für jede Basis $Q_1,..,Q_s$ von $A_\Phi \cap \mathbb{P}_k$ ist $Q_1,..,Q_s,R_0..,R_{k+1}$ eine H-Basis von A_Φ. Ist $a^T P_*^k \in A_\Phi$ gegeben, dann erhalten wir aus

$$(x^2 + y^2) a^T P_*^k = xa^T R_{0..k} + ya^T R_{1..k+1},$$

daß jede vom Nullpunkt verschiedene, gemeinsame reelle Nullstelle der R_i auch eine Nullstelle von $a^T P_*^k$ ist, und daraus folgt (ii).
(iii) Wir definieren:

$$W_k := \{a \in \mathbb{R}^{k+1} / \ a^T(\overline{B}_k T_k^R - B_k T_k^L) = 0\},$$

$$V_k := \{a \in \mathbb{R}^{k+1} / \ a^T \overline{B}_k = a^T B_k = 0\}.$$

Sei $k \geq 3$. Angenommen, es existiert ein $a \in W_k \backslash V_k$.
Dann existiert $0 \neq w = (w_1,..,w_{k-1})^T \in \mathbb{R}^{k-1}$, so daß

$$
\begin{aligned}
a^T B_k &= (w_1,..,w_{k-1},0) = w^T T^R_{k-1}, \\
a^T \bar{B}_k &= (0,w_1,..,w_{k-1}) = w^T T^L_{k-1}
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

gilt, woraus

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(7.2)}{=} a^T(\bar{B}_k D_{k-1} - B_k \Delta_{k-1}) = \\
&\overset{(7.8)}{=} w^T(T^L_{k-1} D_{k-1} - T^R_{k-1} \Delta_{k-1}) = \\
&\overset{(4.10)}{=} w^T(D_{k-2} T^L_{k-2} - \Delta_{k-2} T^R_{k-2})
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

folgt.

Für ein ungerades k erhält man einen Widerspruch zu Satz 4.5 und folglich gilt in diesem Fall $W_k = V_k$.

Ist k gerade und sind zwei linear unabhängige Vektoren $a_1, a_2 \in W_k \backslash V_k$ gegeben, dann folgt aus Satz 4.5 und aus (7.9), daß ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $a_1^T B_k = t a_2^T B_k$ gilt, woraus $(a_1 - t a_2)^T \in V_k$ folgt. Somit erhalten wir für ein gerades k:

$$\dim W_k \leq \dim V_k + 1.$$

Diese Gleichung gilt auch für k=2, da wir in diesem Fall an Stelle von (7.9) die Beziehung

$$0 = a^T(\bar{B}_2 D_1 - B_2 \Delta_1) = w_1 \cdot 0$$

erhalten.

Aus (7.3) und (7.4) folgern wir

$$
\begin{aligned}
\dim V_k &\geq \operatorname{Rang}(\bar{B}_k T^R_k - B_k T^L_k) = k+1 - \dim W_k \\
&\begin{cases} \geq k - \dim V_k, & \text{falls k gerade,} \\ = k+1 - \dim V_k, & \text{falls k ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von (i) schließen wir

$$\dim (A_\Phi \cap \mathbb{P}_k) \geq \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{k+1}{2}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

womit wir die Abschätzung für r nach oben gezeigt haben. Die Abschätzung nach unten ist Möllers untere Schranke. //

Dieser Satz zeigt, daß für ein zentralsymmetrisches Funktional $I \in \Lambda^{++}$ die Klasse $KF^*_{I,k}$ stark an Möllers unterer Schranke (5.2) orientiert ist. Für Produktfunktionale hat Schmid[37] mit einer Satz 7.2-(i) vergleichbaren Aussage gearbeitet. Wir haben ebenfalls für Produktfunktionale die (ii) und (iii) entsprechenden Aussagen bereits in der Arbeit Münzel/Renner[23] gezeigt.
Es ist wohlbekannt, daß es D4-invariante Funktionale $I \in \Lambda^+$ gibt, für die für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Klasse $KF^*_{I,k}$ nicht leer ist. So haben für das Funktional I_{PU} für gerades k Morrow/Patterson[21] und für ungerades k Schmid[37] Formeln aus der Klasse $KF^*_{I,k}$ angegeben, die sogar Möllers untere Schranke annehmen.
Es bleibt ein offenes Problem, eine, Satz 5.1 vergleichbare, innere Charakterisierung derjenigen zentralsymmetrischen Funktionale $I \in \Lambda^{++}$ anzugeben, für die für jedes $k \in \mathbb{N}$ $KF^*_{I,k}$ nicht leer ist.

Als Beispiel zu dem aus Satz 7.1 resultierenden Konstruktionsverfahren untersuchen wir jetzt die Klasse $KF^*_{I,D4,k}$ der D4-invarianten Kubaturformeln aus $KF^*_{I,k}$ für ein beliebiges D4-invariantes Funktional $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ für k=4.
Ist $\Phi \in KF^*_{I,D4,k}$ gegeben, dann gilt für die zugehörige Lösung $(B_k, \overline{B}_k) \in S^*_{I,k}$ von (7.1) bis (7.4) aus Symmetriegründen

(7.10) $\overline{B}_k = (B_k)^Z$,

(7.11) $\forall\ 0 \leq i \leq k\ \forall\ 0 \leq j \leq k-1$: $b^k_{ij} = 0$, falls i+j ungerade ist.

Diese Eigenschaften überlegt man sich leicht mit Hilfe von Lemma 1.4-(iii) ganz entsprechend den Aussagen von Bemerkung 4.2.

Unter Berücksichtigung von Bemerkung 4.2-(ii)-(c) erhalten wir aus (7.10) und aus (7.1) bis (7.4) folgende zu (7.1) bis (7.4) äquivalente Bedingungen an B_k:

$$\begin{aligned}
&D_{k-1}E_{k-1}T^R_{k-1} + T^R_k E_{k+1} B_k \text{ ist zentralsymmetrisch,}\\
&B_k E_k D_{k-1} \qquad\qquad " \qquad\qquad " \quad ,\\
&(B_k E_k T^R_k - (B_k E_k T^R_k)^Z) B_k = 0.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Für k=4 erhalten wir aus (7.12) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&b_{11} - d^3_{00} = b_{42} - d^3_{31},\\
&b_{31} - d^3_{20} = b_{22} - d^3_{11},\\
&b_{13} - d^3_{02} = b_{40},\\
&b_{33} - d^3_{22} = b_{20},\\
&b_{00}d^3_{31} + b_{02}d^3_{11} = b_{40}d^3_{31} + b_{42}d^3_{11},\\
&b_{11}d^3_{20} + b_{13}d^3_{00} = b_{31}d^3_{22} + b_{33}d^3_{02},\\
&b_{11}d^3_{22} + b_{13}d^3_{02} = b_{31}d^3_{20} + b_{33}d^3_{00},\\
&(b_{42} - b_{00})b_{11} + (b_{40} - b_{02})b_{31} = 0,\\
&(b_{22} - b_{20})b_{11} + (b_{20} - b_{22})b_{31} = 0,\\
&(b_{02} - b_{40})b_{11} + (b_{00} - b_{42})b_{31} = 0,\\
&(b_{42} - b_{00})b_{13} + (b_{40} - b_{02})b_{33} = 0,\\
&(b_{22} - b_{20})b_{13} + (b_{20} - b_{22})b_{33} = 0,\\
&(b_{02} - b_{40})b_{13} + (b_{00} - b_{42})b_{33} = 0,\\
&b_{33}b_{00} + (b_{31} - b_{11})b_{20} - b_{13}b_{40} = 0,\\
&b_{13}b_{00} + (b_{11} - b_{31})b_{20} - b_{33}b_{40} = 0,\\
&b_{33}b_{02} + (b_{31} - b_{11})b_{22} - b_{13}b_{42} = 0,\\
&b_{13}b_{02} + (b_{11} - b_{31})b_{22} - b_{33}b_{42} = 0.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Wir haben in (7.13) natürlich bereits (7.11) und die entsprechende Eigenschaft der d^3_{ij} (vgl. Bemerkung 4.2-(iii)-(c)) berücksichtigt; zudem haben wir an Stelle von b^4_{ij} jeweils b_{ij} geschrieben.

Im weiteren benötigen wir folgende aus Abschnitt 4 resultierende Eigenschaften der Momente M^k_{ij} und der Rekursionskoeffizienten d^k_{ij} für unser D4-invariantes Funktional I:

Aus der D4-Invarianz von I erhalten wir mit Hilfe von Bemerkung 4.2:

(7.14) $\forall\ 0 \leq i,j \leq k$: $M^k_{ij} = M^k_{k-i,k-j}$,

$M^k_{ij} = 0$, falls i+j ungerade ist.

Beispielsweise hat M_3 folgende Gestalt:

$$M_3 = \begin{pmatrix} M^3_{00} & 0 & M^3_{02} & 0 \\ 0 & M^3_{11} & 0 & M^3_{02} \\ M^3_{02} & 0 & M^3_{11} & 0 \\ 0 & M^3_{02} & 0 & M^3_{00} \end{pmatrix}$$

Für die Matrix

$$D^*_3 := \begin{pmatrix} -d^3_{22} & d^3_{11}-d^3_{20} \\ -d^3_{02} & d^3_{31}-d^3_{00} \end{pmatrix}$$

folgern wir aus Satz 4.5

$$\det(D^*_3) \neq 0$$

und aus (4.10)

(7.15) $$D^*_3 = \begin{pmatrix} d^4_{20}-d^4_{33} & d^4_{22}-d^4_{31} \\ d^4_{40}-d^4_{13} & d^4_{42}-d^4_{11} \end{pmatrix}$$

Definieren wir

$$M_3^* := \begin{pmatrix} M_{00}^3 & M_{02}^3 \\ M_{02}^3 & M_{11}^3 \end{pmatrix}, \quad M_4^* := \begin{pmatrix} M_{02}^4 - M_{11}^4 & M_{22}^4 - M_{13}^4 \\ M_{04}^4 - M_{13}^4 & M_{02}^4 - M_{11}^4 \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir mit Hilfe von (7.15) und von (4.4) $D_3^* \cdot M_3^* = M_4^*$ und folglich gilt $\det(M_4^*) \neq 0$. Ist I ein Produktfunktional, dann gilt insbesondere $\det(M_4^*) = (M_{11}^4)^2 > 0$ und folglich gilt für jedes D4-invariante Funktional $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$:

(7.16) $$\det(M_4^*) > 0.$$

Wir untersuchen jetzt zwei einparametrige Lösungsfamilien von (7.13).

Lösungsfamilie L1:

$$\begin{aligned}
&b_{11} = b_{13} = b_{31} = b_{33} = 0,\\
&b_{42} = d_{31}^3 - d_{00}^3,\\
&b_{40} = -d_{02}^3,\\
&b_{22} = d_{11}^3 - d_{20}^3,\\
&b_{20} = -d_{22}^3,\\
&b_{00} \in \mathbb{R},\\
&d_{11}^3(b_{02} - b_{42}) = d_{31}^3(b_{40} - b_{00}).
\end{aligned}$$

Wir können unter Verwendung von (7.15) B_4 wie folgt darstellen:

$$B_4 = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & b_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{20}^4 - d_{33}^4 & 0 & d_{22}^4 - d_{31}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{40}^4 - d_{13}^4 & 0 & d_{42}^4 - d_{11}^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die zugehörige Matrix $M(B_4,\overline{B}_4)$ aus Satz 7.1 gilt (vgl. Bemerkung im Anschluß an Satz 7.1):

$$M(B_4,\overline{B}_4)T_4^U = B_4M_3.$$

Berechnet man die symmetrische Matrix $M(B_4,\overline{B}_4)$ mit Hilfe dieser Beziehung unter Verwendung von $D_3^*M_3^* = M_4^*$, und streicht die Nullzeilen und Nullspalten, so erhält man

$$M^*(B_4,\overline{B}_4) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

mit

$$c = M_{04}^4 - M_{13}^4, \quad d = M_{22}^4 - M_{13}^4, \quad b = M_{02}^4 - M_{11}^4$$

und mit

$$a = \mu_1 b_{00} + \mu_2 \ , \quad \mu_1 = (M_{00}^3 M_{11}^3 - (M_{02}^3)^2)/M_{11}^3 > 0, \quad \mu_2 = b \cdot M_{02}^3/M_{11}^3.$$

Folglich ist $M(B_4,\overline{B}_4)$ genau dann positiv semidefinit, wenn $a \geq |c|$, $d(a+c) \geq 2b^2$ und $d \geq 0$ gilt. Wir können $d = 0$ ausschliessen, da dann $b = 0$ wäre, im Widerspruch zu (7.16). Aus dem gleichen Grund können wir $a = c$ ausschließen.
Wir erhalten somit aus Satz 7.1 folgendes Ergebnis:
Erfüllt unser Funktional die Bedingung

(7.17) $$M_{22}^4 > M_{13}^4,$$

dann existiert zu jeder Lösung aus L1 mit

$$b_{00} \geq b^* := (2b^2/d - c - \mu_2)/\mu_1$$

eine Kubaturformel Φ aus der Klasse $KF_{I,D4,4}^*$. Aus Satz 7.2 folgt für das zugehörige Ideal A_Φ:

$$A_\Phi \cap \mathbb{P}_4 = \{a^T P_*^4 / \ M(B_4,\overline{B}_4)a = 0\}.$$

Folglich hat Φ 12 Knoten, falls $b_{00}=b^*$ ist, und es gilt

$$A_\Phi = (P_0^4 - 2b/dP_2^4 + P_4^4, P_1^4, P_3^4).$$

Wir erhalten so für spezielle Funktionale wohlbekannte Formeln: so zum Beispiel für das Funktional I_{PL} die Formel von Mysovskikh, Phillips (vgl. Formel C_2: 7-2 in Stroud[41]) und für I_D die Formel von Peirce, Hammer/Stroud (vgl. Formel S_2: 7-1 in Stroud[41]; diese Formel ist jedoch um den Winkel $\pi/4$ gedreht!).
Ist $b_{00} > b^*$, dann hat A_Φ 13 Knoten, und es gilt

$$A_\Phi = (R_0, P_1^4, P_3^4, R_5).$$

Wir verweisen hier insbesondere auf die Formeln von Huelsman [11, Theorem 5].

Lösungsfamilie L2:

$$\begin{aligned}
&b_{11} \in \mathbb{R}, && b_{33}(d_{00}^3-d_{02}^3) = b_{11}(d_{22}^3-d_{20}^3),\\
&b_{31} = b_{11}, && b_{13} = b_{33},\\
&b_{02} = b_{11}+d_{31}^3-d_{00}^3, && b_{00} = b_{33}-d_{02}^3,\\
&b_{22} = b_{11}+d_{11}^3-d_{20}^3, && b_{20} = b_{33}-d_{22}^3,\\
&b_{42} = b_{11}+d_{31}^3-d_{00}^3, && b_{40} = b_{33}-d_{02}^3.
\end{aligned}$$

Wir holen uns ganz entsprechend der Vorgehensweise bei der Lösungsfamilie L1 die Matrix $M(B_4,\bar{B}_4)$, und wir erhalten:

$$M(B_4,\bar{B}_4) = \begin{pmatrix} a+c & 0 & a+b & 0 & a+c \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a+b & 0 & a+d & 0 & a+b \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a+c & 0 & a+b & 0 & a+c \end{pmatrix},$$

wobei b, c und d wie bei L1 definiert sind und

$$a = b_{33}M^3_{00}+b_{11}M^3_{02} = \mu\cdot b_{33}, \quad \mu = (M^3_{00}M^3_{11} - (M^3_{02})^2)/(M^3_{11}-M^3_{02}) > 0$$

ist.

Den Wert von μ und die Eigenschaft $\mu > 0$ erhält man aus den aus (4.4) und aus (4.10) resultierenden, elementaren Beziehungen zwischen den Momenten und den Rekursionskoeffizienten.

$M(B_4,\overline{B}_4)$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn

$$a+c \geq 0, \quad a \geq 0, \quad a+d \geq 0, \quad a(d+c-2b) \geq b^2-cd$$

erfüllt sind. Aus (7.16) folgt $b^2-cd > 0$, und somit muß stets $a > 0$ und $d+c > 2b$ gelten. Aus dem gleichen Grund können wir ausschließen, daß a+c und a+d gleichzeitig Null sind.

Wir erhalten somit aus Satz 7.1 folgendes Ergebnis:

Erfüllt unser Funktional I die Bedingung

$$M^4_{04} + M^4_{22} - 2M^4_{13} > 2(M^4_{02} - M^4_{11}), \tag{7.18}$$

und ist

$$m^* := (b^2-cd)/(d+c-2b),$$

dann existiert zu jeder Lösung aus L2 mit

$$b_{33} \geq m^*/\mu$$

eine Formel Φ aus der Klasse $KF^*_{I,D4,4}$.

Ist $b_{33} = m^*/\mu$, dann hat Φ 12 Knoten und es gilt

$$A_\Phi = (P^4_0-P^4_4,\ P^4_1-P^4_3,\ P),$$

mit

$$P := \begin{cases} P^4_0 - (a+c)/(a+b)P^4_2 & \text{falls } a+c \neq 0 \neq a+d, \\ P^4_2 & \text{falls } a+d = 0, \\ P^4_0 & \text{falls } a+c = 0. \end{cases}$$

Für I_{PL} erhalten wir die Formel von Tyler (vgl. Formel C_2: 7-1 in Stroud[41]), und für I_D die oben angegebene Formel, um $\pi/4$ gedreht.

Ist $b_{33} > m^*/\mu$, dann hat Φ 13 Knoten und es gilt

$$A_\Phi = (P_0^4-P_4^4,\ P_1^4-P_3^4,\ R_2,\ R_3).$$

Für spezielle Funktionale sind wiederum Formeln aus dieser Familie bekannt (vgl. Huelsman[11], Schmid[36]).

Für Funktionale mit Produktstruktur haben wir die zu L1 und L2 gehörenden Formeln bereits in der Arbeit Münzel/Renner[23] hergeleitet.

Ist $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ ein Funktional mit der Eigenschaft $I(P^*) < 0$, wobei P^* das Polynom (2.1) ist, dann ist $I^* \in \tilde{\Lambda}^{++}$ definiert durch

$$I^*(P) := \Big(\sum_{T \in D4} I(P \circ T)\Big)/8$$

ein D4-invariantes Funktional mit der Eigenschaft $I^*(P^*) < 0$. Folglich sind (7.17) und (7.18) echte Bedingungen, da offenbar I^* diese nicht erfüllen kann. Es bleibt zu klären, ob durch (7.17) und (7.18) die Teilmenge $(\Lambda_6^+)_{D4}$ von $(\Lambda_6^{++})_{D4}$ bereits charakterisiert wird. Ist das nicht der Fall, dann existieren Funktionale $I \in \tilde{\Lambda}^{++}$ mit $I_{|\,\mathbb{P}_7} \in (\tilde{\Lambda}_7^+)$, für die keine Formeln aus den hier angegebenen Familien existieren.

Die zwei Lösungsfamilien L1 und L2 beschreiben im allgemeinen, bis auf zwei, bereits alle Lösungen von (7.13), wie man wie folgt einsehen kann:

Durch elementare Operationen erhält man aus dem nichtlinearen Teil von (7.13) die Gleichungen

$$(b_{22}-b_{20})\cdot(b_{11}-b_{31}) = 0,$$
$$(b_{22}-b_{20})\cdot(b_{13}-b_{33}) = 0,$$
$$(b_{42}-b_{00}+b_{02}-b_{40})\cdot(b_{11}-b_{31}) = 0,$$
$$(b_{42}-b_{00}+b_{02}-b_{40})\cdot(b_{13}-b_{33}) = 0,$$

welche folgende Fallunterscheidung nahelegen:

(I) $b_{11} = b_{31}$, $b_{13} = b_{33}$,

(II) $b_{22} = b_{20}$, $b_{42} - b_{00} = b_{40} - b_{02}$.

Im Fall (I) erhält man aus (7.13)

$$(b_{00}-b_{40})b_{33} = 0,$$
$$(b_{02}-b_{42})b_{33} = 0,$$
$$(b_{42}-b_{00}+b_{40}-b_{02})b_{11} = 0,$$
$$d_{11}^3(b_{02}-b_{42}) = d_{31}^3(b_{40}-b_{00}),$$

woraus man unter Berücksichtigung von $d_{11}^3 \neq d_{31}^3$

(I)-(a) $b_{11} = b_{31}$, $b_{13} = b_{33}$, $b_{00} = b_{40}$, $b_{02} = b_{42}$,

(I)-(b) $b_{11} = b_{13} = b_{31} = b_{33} = 0$

erhält. (I)-(a) ergibt die Lösungsfamilie L2 und (I)-(b) ergibt die Lösungsfamilie L1.

Im Fall (II) erhält man aus (7.13)

$$(b_{42}-b_{00})\cdot(b_{11}+b_{31}) = 0,$$
$$(b_{42}-b_{00})\cdot(b_{13}+b_{33}) = 0,$$
$$d_{11}^3(b_{02}-b_{42}) = d_{31}^3(b_{40}-b_{00}),$$

woraus man

(II)-(a) $b_{20} = b_{22}$, $b_{00} = b_{02} = b_{40} = b_{42}$,

(II)-(b) $b_{20} = b_{22}$, $b_{42}-b_{00} = b_{40}-b_{02}$,
$b_{11} = -b_{31}$, $b_{13} = -b_{33}$,

erhält.

Diese zwei Bedingungen führen im allgemeinen zu zwei einzelnen Lösungen von (7.13), deren Existenz jedoch bereits vom jeweiligen Funktional abhängt. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine weitere Diskussion von Fall (II) und verweisen für Produktfunktionale auf die Arbeit Münzel/Renner[23, Satz6].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Berg, C., Christensen, J.P.R., Jensen, C.U.: A remark on the multidimensional moment problem. Math. Ann. 243, 163-169, 1979.

[2] Dubois, D.W., Efroymson, G.: Algebraic theory of real varieties I. In: Studies and essays presented to Yu-Why Chen on his sixtieth birthday. Academia Sinica, Taipei, 107-135, 1970.

[3] Franke, R.: Obtaining cubatures for rectangles and other planar regions by using orthogonal polynomials. Math. Comp. 25, 803-817, 1971.

[4] Friedrich, J.: A note on the two-dimensional moment problem. Math. Nachr. 121, 285-286, 1985.

[5] Fritsch, F.N.: On the existence of regions with minimal third degree integration formulas. Math. Comp. 24, 855-861, 1970.

[6] Fuglede, B.: The multidimensional moment problem. Expo. Math. 1, 47-65, 1983.

[7] Günther, C.: Zur Konstruktion mehrdimensionaler Integrationsformeln. ZAMM 53, T194-T195, 1973.

[8] Günther, C.: Third degree integration formulas with four real points and positive weights in two dimensions. SIAM J. Numer. Anal. 11, No. 3, 480-493, 1974.

[9] Haegemans, A., Piessens, R.: Construction of cubature formulas of degree seven and nine symmetric planar regions, using orthogonal polynomials. SIAM J. Numer. Anal. 14, No. 3, 492-508, 1977.

[10] Hilbert, D.: Über die Darstellung definiter Formen als Summen von Formenquadraten. Math. Ann. 32, 342-350, 1888.

[11] Huelsman, C.B.: Quadrature formulas over fully symmetric planar regions. SIAM J. Numer. Anal. 10, No. 3, 539-552, 1973.

[12] Kowalski, M.A.: The recursion formulas for orthogonal polynomials in n variables. SIAM J. Math. Anal. 13, No. 2, 309-315, 1982.

[13] Kowalski, M.A.: Orthogonality and recursion formulas for polynomials in n variables. SIAM J. Math. Anal. 13, No. 2, 316-323, 1982.

[14] Krylov, V.I.: Approximative Berechnung von Integralen (in Russ.). Zweite Auflage, Moskau, 1967.

[15] Kuzmenkov, V.A.: The existence of cubature formulas with the least possible number of nodes. USSR Comp. Math. & Math. Phys. 16, 242-244, 1976.

[16] Kuzmenkov, V.A.: The finite moment problem for several variables. Vestnik Leningrad. Univ. No. 19, 1975/ Übersetzt in: Vestnik Leningrad Univ. Math., Vol. 8, 349-355, 1980.

[17] Linden, J., Kroll, N., Schmid, H.J.: Minimale Kubaturformeln für Integrale über dem Einheitsquadrat. preprint no. 373, SFB 72 Universität Bonn, 1980.

[18] Macaulay, F.S.: The Algebraic Theory of Modular Systems. Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. No. 19, Cambridge Univ. Press, 1916.

[19] Möller, H.M.: Polynomideale und Kubaturformeln. Diss., Univ. Dortmund, 1973.

[20] Möller, H.M.: Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl. Numer. Math 25, 185-200, 1976.

[21] Morrow, C.R., Patterson, T.N.L.: Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory. SIAM J. Numer. Anal. 15, No. 5, 953-976, 1978.

[22] Motzkin, T.S.: The arithmetic-geometric inequality. In: Inequalities. Hrsg. O. Shisha, Academic Press, New York, 1967.

[23] Münzel, G., Renner, G.: Zur Charakterisierung und Berechnung von symmetrischen Kubaturformeln. Computing 31, 211-230, 1983.

[24] Mysovskikh, I.P.: Cubature formulae and orthogonal polynomials. USSR Comp. Math. 9, 217-228, 1969.

[25] Mysovskikh, I.P.: Cubature formulae and orthogonal polynomials. USSR Comp. Math. & Math. Phys. 10, No. 2, 219-223, 1970.

[26] Mysovskikh, I.P.: Interpolatorische Kubaturformeln (in Russ.). In: Theorie von Kubaturformeln und Anwendung von Funktionalanalysis auf gewisse Probleme der Math. Physik. Hrsg. S.L. Sobolev, Novosibirsk, 73-90, 1973.

[27] Mysovskikh, I.P.: Common zeros of polynomials and cubature formulas (in Russ.). Vestnik Leningrad Univ. Nr. 7, 40-49, 1973.

[28] Mysovskikh, I.P.: On Chakalov's theorem. USSR Comp. Math. 15, 221-227, 1975.

[29] Mysovskikh, I.P.: Numerical characteristics of orthogonal polynomials in two variables (in Russ.). Vestnik Leningrad

Univ. No. 19, 1970/ Übersetzt in: Vestnik Leningrad. Univ. Math. 3, 323-332, 1976.

[30] Mysovskikh, I.P.: Orthogonal polynomials in several variables (in Russ.). Metody Vychisl. 10, Izdvo Leningrad. Univ., 26-35, 1976.

[31] Mysovskikh, I.P., Cernicina, V.J.: The answer to a question of Radon. Dokl. Akad. Nauk SSSR,Tom 198, No. 3, 1971/ Übersetzt in: Soviet Math. Dokl., Vol. 12, No. 3, 1971.

[32] Radon, J.: Zur mechanischen Kubatur. Monatsh. Math. 52, 286-300, 1948.

[33] Risler, J.J.: Une charactérisation des idéaux des variétés algébriques réelles. Note aux CRAS, Paris 272, 1171-1173, 1970.

[34] Schmid, H.J.: On cubature formulae with a minimal number of knots. Numer. Math. 31, 281-297, 1978.

[35] Schmid, H.J.: On Gaussian cubature formulae of degree 2k-1. In: Numerische Integration. Hrsg. G. Hämmerlein, ISNM 45, Basel, 252-263, 1979.

[36] Schmid, H.J.: Construction of cubature formulae using real ideals. preprint no. 275, SFB 72 Universität Bonn, 1979.

[37] Schmid, H.J.: Interpolatorische Kubaturformeln und reelle Ideale. Math. Z. 170, 267-282, 1980.

[38] Schmid, H.J.: Interpolatorische Kubaturformeln. Dissertationes Mathematicae CCXX. Hrsg. K. Borsuk, Warschau, 1983.

[39] Schmüdgen, K.: An example of a positive polynomial which is not a sum of squares of polynomials - A positive, but not strongly positive functional. Math. Nachr. 88, 385-390, 1979.

[40] Stroud, A.H.: Integration formulas and orthogonal polynomials for two variables. SIAM J. Numer. Anal. 6, No. 2, 222-229, 1969.

[41] Stroud, A.H.: Approximate Calculation of Multiple Integrals. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

LEBENSLAUF

24.03.1955	als Sohn von Luise Renner, geb. Fischer und Hans Renner in Wunsiedel geboren
1961 - 1965	Grundschule in Wunsiedel
1965 - 1974	Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium in Wunsiedel Abschluß: Abitur
07.74 - 09.75	Wehrdienst
10.75 - 05.82	Studium der Mathematik an der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen Abschluß: Diplom-Mathematiker
07.82 - 02.83	als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Erlangen tätig
seit 02.83	als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Erlangen tätig

Erlangen, im November 1985

COPY PRINT
Klaus Feller
Marquardsenstr. 21
8520 Erlangen
Tel.: 0 91 31 / 24 220